Introduction to Statistics and Probability

A. F. Thahara Rifa Fuard

Published by

Centre for External Degrees and

Professional Learning

South Eastern University of Sri Lanka

Introduction to Statistics and Probability

புள்ளிவிபரவியல் மற்றும் நிகழ்தகவிற்கான அறிமுகம்

பொருளடக்கம்

பொருளடக்கம் பக்கம்

அத்தியாயம் - 01

புள்ளிவிபரவியலுக்கான அறிமுகம்

பொருளடக்கம் **பக்கம்**

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

புள்ளிவிபரவியல் என்பது பரிசோதனைகளை அல்லது ஆய்வுகளைத் திட்டமிடல், தரவுகளைச் சேகரித்தல், தொகுத்தல், அழித்தல், பகுப்பாய்வு செய்தல், விளக்கமளித்தல் மற்றும் முடிவுகளை எடுத்தல் என வரையறுக்கப்படலாம்.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

புள்ளிவிபரவியல் தொடர்பான அறிஞர்களின் வரைவிலக்கணங்கள், படிமுறைகள், வரையறைகள், தொழிற்பாடுகள், முக்கியத்துவம், புள்ளிவிபரவியலின் வகைகள், புள்ளிவிபரவியல் முறையற்றதாக பயன்படுத்தப்படுகின்ற சந்தர்ப்பங்கள் தொடர்பாக விளக்குதல்

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் புள்ளிவிபரவியல் தொடர்பான அறிஞர்களின் வரைவிலக்கணங்கள், படிமுறைகள், வரையறைகள், தொழிற்பாடுகள், முக்கியத்துவம், புள்ளிவிபரவியலின் வகைகள், புள்ளிவிபரவியல் முறையற்றதாக பயன்படுத்தப்படுகின்ற சந்தர்ப்பங்கள் தொடர்பான அறிவினைப் பெற முடியுமாக இருப்பர்.

புள்ளிவிபரவியல் தொடர்பான வரைவிலக்கணங்கள்

புள்ளிவிபரவியல் தொடர்பாக அறிஞர்கள் முன்வைத்த வரைவிலக்கணங்கள் பின்வருமாறு:

1. எண்கணிதத் தரவுகளைக் கணிப்பிடப்பட்ட அவதானிப்பினை அடிப்படையாகக் கொண்டு நிச்சயமற்ற நிலைமைகளின் போது தீர்மானம் எடுதத்தல் முறையே புள்ளிவிபரவியலாகும். (Statistics is a method of decision making in the face of uncertainty on the basis of numerical data and calculated data)

   (Prof. Ya-Lum-Chow)

2. எண்கணிதத் தரவுகளைச் சேகரித்தல், முன்வைத்தல், பகுப்பாய்வு செயதல் விமர்சனம் செய்தல் புள்ளிவிபரவியல் எனப்படும். (Statistics may be defined as the collection, presentation, analysis and interpretation of numerical data)

   (Croxton and Cowden)

3. புள்ளிவிபரவியல் என்பது ஏதாவது சமூகமொன்றினை முழுமை எனக் கருத்திற் கொண்டு விஞ்ஞான ரீதியிலான அனைத்துக் கோணங்கள் தொடர்பாக அளவீடு செய்யும் விஞ்ஞானமாகும். (Statistics is the science of measurement of social organism regarded as a whole in all its manifestations) ***(Bowley)***

இதற்கேற்ப, புள்ளிவிபரவியல் என்பது பல்வேறு விடயங்கள் தொடர்பில் தரவுகளைச் சேகரித்தல், அவற்றை ஒழுங்கமைத்தல், தரவகளை முன்வைத்தல் அவற்றைப் பகுப்பாய்வு செய்து அதனூடாகத் தீர்மானம் எடுக்கும் நுட்ப முறை தொடர்பான விளக்கத்தைப் பெறுதலாகும்.

புள்ளிவிபரவியலின் படிமுறைகள்

- உரிய தரவுகளைச் சேகரித்தல்
- ஒழுங்கமைத்து முன்வைத்தல்
- தரவுப் பகுப்பாய்வும் விளக்குதலும்
- தீர்மானத்திற்கு வருதல்

புள்ளிவிபரவியலின் தொழிற்பாடுகள்

- விடயங்களை உரிய முறையில் முன்வைத்தல்.
- சிக்கலான தரவுகளை விளக்கம் பெறுவதற்கு ஏற்றவாறு எளிமையாகக் காட்டுதல்.
- ஒப்பிடும் நுட்ப முறையொன்றாக இருத்தல்.
- தனிநபரொருவரின் அனுபவங்களை விரிவாகவும் விஞ்ஞான ரீதியாகவும் பகுப்பாய்வு செய்தல்.
- கொள்கைகளை உருவாக்குவதற்கு வழிகாட்டுதல்.
- ஏதாவது விடயமொன்றின் பருமனை அளவிடக்கூடியதாக இருத்தல்.
- காரண விளைவு தொடர்புகளை வெளிப்படுத்திக் காட்டுவதற்கு உதவுதல்.

புள்ளிவிபரவியலின் வரையறைகள்

- அளவு ரீதியான தரவுகளை மாத்திரம் பயன்படுத்துதல்.
- தனித் தரவுடன் மாத்திரம் கருமமாற்றாதிருத்தல்.
- பொதுவானதும், சராசரி நிலைமைகளின் கீழ் மாத்திரம் புள்ளிவிபரப் பெறுபேறுகள் உண்மையாயிருத்தல்.
- கவனயீனம், அறியாமை என்பவற்றின் காரணமாகப் புள்ளிவிபரத் தரவுகளைப் பயன்படுத்தாதிருத்தல்.
- புள்ளிவிபரத்தினால் சகல விடயங்களையும் உறுதிப்படுத்த முடியாதிருத்தல்.
- புள்ளிவிபர முடிவுகளில் நிச்சயமற்ற தன்மை காணப்படல்.
- புள்ளிவிபர கல்வியின் பெறுபேறு எக்காலத்திற்கும் செல்லுபடியற்றதாக இருத்தல்.

புள்ளிவிபரவியலின் முக்கியத்துவம்

- நிச்சயமற்ற நிலைமைகளின்போது சிறந்த தீர்மானம் எடுப்பதற்கு வழிகாட்டுதல்.

- மாதிரியொன்றை அறிந்து அதன் முழுமை தொடர்பில் சிறந்த தீர்மானத்திற்கு வரமுடிதல்.
- மாறியொன்றின் எதிர்கால நடத்தையினை எதிர்வு கூறக்கூடியதாக இருத்தல்.
- மாறிகளுக்கிடையிலான தொடர்பினை இனங்காண முடிதல்.
- பல்வேறு மாறிகளின் ஒப்பீட்டு ரீதியான முக்கியத்துவத்தை இனங்காண முடிதல்.
- சிக்கலான தொகுதியொன்றிலிருந்து எளிமையாகப் பகுப்பாய்வு செய்ய முடிதல்.

புள்ளிவிபரவியலின் வகைகள்

விபரணப் புள்ளிவிபரவியல், அனுமானப் புள்ளிவிபரவியல் என புள்ளிவிபரவியல் இரு வகைப்படுகின்றது.

- தரவு சேகரித்தல், ஒழுங்கமைத்தல், முன்வைத்தல், தரவுப்பகுப்பாய்வு செய்தல் என்பன விபரணப் புள்ளிவிபரவியல் என வரையறை செய்யப்படகின்றது.
- மாதிரி ஆய்வொன்றின் பெறுபேற்றினைப் பயன்படுத்தி முழுமை தொடர்பிலான கருத்துக்களை வெளிப்படுத்துவது அனுமானப் புள்ளிவிபரவியல் என வரையறை செய்யப்படகின்றது.

புள்ளிவிபரவியல் முறையற்றதாக பயன்படுத்தப்படுகின்ற சந்தர்ப்பங்கள்

- பகுப்பாய்வின் விளைவுகளைப் பிழையான முறையில் விளங்கிக் கொள்ளல்.
- பொருத்தமற்ற தரவுகளை ஒப்பீடு செய்வதற்காகப் பயன்படுத்துதல்.
- புள்ளிவிபரப் பெறுபேறு தொடர்பில் பக்கச் சார்பாக விளக்கம் கூறல்.

- அளவுரீதியானதும் நியாயமானதுமான விடயமொன்றைப் பயன்படுத்தாது அங்கீகாரங்களை வழங்கல்.
- மாதிரியொன்றைப் பக்கச் சார்பாகத் தெரிவு செய்தல்.

சுருக்கம்

புள்ளிவிபரவியல் என்பது பல்வேறு விடயங்கள் தொடர்பில் தரவுகளைச் சேகரித்தல், அவற்றை ஒழுங்கமைத்தல், தரவுகளை முன்வைத்தல் அவற்றைப் பகுப்பாய்வு செய்து அதனூடாகத் தீர்மானம் எடுக்கும் நுட்ப முறை தொடர்பான விளக்கத்தைப் பெறுதலாகும்.

விபரணப் புள்ளிவிபரவியல், அனுமானப் புள்ளிவிபரவியல் என புள்ளிவிபரவியல் இரு வகைப்படுகின்றது.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. புள்ளிவிபரவியல் என்றால் என்ன என்பதை உமது மொழிநடையில் விளக்குக.
2. புள்ளிவிரவியலின் முக்கியத்துவம் மற்றும் குறைபாடுகள் தொடர்பாக கருத்துரைக்குக.
3. புள்ளிவிபரவியலின் வகைகளை உதாரணங்களுடன் விளக்குக.

திறவுச் சொற்கள்

விபரணப் புள்ளிவிபரவியல், அனுமானப் புள்ளிவிபரவியல்

உசாத்துணை நூற்கள்

Gupta, C.S. (2013). *Fundamentals of Statistics*. Himalaya Publishing House

அத்தியாயம் - 02

புள்ளிவிபரவியல் தரவு சேகரிப்பு

பொருளடக்கம் **பக்கம்**

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

புள்ளி விபரவியல் ஆய்வொன்றில் தரவு சேகரிப்பானது மிக முக்கிய இடத்தை வகிக்கின்றது. ஆய்வின் முடிவானது பெறப்பட்ட தரவுகளிற்கு அமைவாகவே அமையப்பெறும்.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

புள்ளிவிபரவியலில் தரவுகளின் வகைகள், அளவீட்டு மட்டங்கள், தரவு சேகரிப்பு முறைகள், தரவு சேகரிப்பு முறைகளிலுள்ள பிரச்சினைகள் தொடர்பாக விளக்குதல்

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் தரவுகளின் வகைகள், அளவீட்டு மட்டங்கள், தரவு சேகரிப்ப முறைகள், தரவு சேகரிப்பு முறைகளிலுள்ள பிரச்சினைகள் தொடர்பான அறிவினைப் பெற முடியுமாக இருப்பர்.

தரவுகளை வகைப்படுத்தல் (Classification of Data)

தரவுகளின் தன்மைக்கேற்ப தரவுகளை பின்வருமாறு இரண்டு வகைகளாக வகைப்படுத்தலாம்.

i. பண்புத் தரவுகள் (Qualitative Data)

ii. எண்கணியத் தரவுகள் (Quantitative Data)

பண்புத் தரவுகள் (Qualitative Data): பண்புகளை விபரிக்கின்ற தரவுகள் பண்புத் தரவுகள் எனப்படும். உதாரணம்: பால் நிலை (ஆண், பெண்) நிறம் (நீலம், சிவப்பு, பச்சை…..)

எண்கணியத் தரவுகள் (Quantitative Data)

எண் சார்ந்த தரவுகள் எண்கணியத் தரவுகள் எனப்படும். எண்கணியத் தரவுகளை மேலும் இரண்டு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

பின்னகத் தரவுகள் (Discrete Data)

பின்னகத் தரவுகள் **(Discrete Data)** என்பது ஒரு மாறியின் தரவுகள் கூட்டல் விருத்தியில் காணப்படுமாயின் அவை பின்னகத் தரவுகள் எனப்படும்.

உதாரணம்: குடும்பத்தில் உள்ள அங்கத்தவர்களின் எண்ணிக்கை (1,2, 3,………)

தொடர்ச்சித் தரவுகள் (Continuous Data)

தரவுகள் குறிப்பிட்ட ஆயிடையில் எந்த ஒரு பெறுமானத்தையும் அல்லது எல்லாவற்றையும் கொள்ளக் கூடியது எனின் அவை தொடர்ச்சித் தரவுகள் எனப்படும்.

உதாரணம்: மாணவர்களின் உயரம் (120.3cm, 122cm, 128.6cm………..)

தரவுகளின் அளவீட்டு மட்டங்கள் (Scales of Measurements)

i **பெயரியல் தரவுகள் (Nominal):** மாறி ஒன்றிற்குரிய பண்புகள் பெயர்களாகக் காணப்படுதல் பெயர் அளவுடைய தரவு என அழைக்கப்படும். இத்தரவுகளை கணித ரீதியாக கணிப்பீடு செய்ய முடியாது. இது வரிசைப்படுத்த முடியாத தரவுகள் ஆகும்.

உதாரணம்: ஆண் பெண் தன்மையினை அறிந்து கொள்ளல், வதிவிட மாவட்டத்தை அறிந்து கொள்ளல்.

ii. **வரிசைத் தரவுகள் (Ordinal):** பல்வேறு வகைப்படுத்தல்கள் கொண்ட மாறியொன்றிற்குரிய பண்புகளின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்தல் செய்யப்படும் தரவுகள் வரிசைத் தரவுகள் எனப்படும். இது ஒப்பீடு செய்யக்கூடியவாறான கருத்திதைத் தரும்.

உதாரணம்: பரீட்சைப் பேறுகள் (A+, A, B+, B………),
சேவை (மிக நன்று, நன்று, ஓரளவு…..)

iii. **ஆயிடைத் தரவுகள் (Interval):** வரிசைப் படுத்தக்கூடிய, வித்தியாசம் கருத்தைத் தரக்கூடிய ஆனால் விகித அர்த்தத்தை தராத தரவுகள் ஆயிடைத் தரவுகள் எனப்படும். இது உண்மையான பூச்சியத்தைக் கொண்டிராது.

உதாரணம்: வெப்பநிலை (23^oC, 53^oC, 0^oC, -15^oC……….)

iv **விகிதத் தரவுகள் (Ratio):** ஆயிடைத் தரவுகளின் பண்புகள் காணப்படுவதுடன் உண்மையான பூச்சியத்தைக் (Absolute Zero Point) கொண்ட தரவுகள் ஆகும். விகிதத் தரவுகளின் விகிதம் அர்த்தத்தைத் தரக்கூடியது.

உதாரணம்: நிறை (25Kg, 50Kg, 64.5Kg………….)

தரவு சேகரிப்பு (Data Collection)

புள்ளிவிபரவியல் ஆய்வில், ஆய்விற்குரிய தரவு சேகரிப்பதே முதற்படியாகும். ஆய்வின் முடிவுகள், பெறப்பட்ட தரவுகளைப் பொறுத்தே அமையும். எனவே தரவுகளை சேகரிக்கும் முன்னர் ஆய்வின் நோக்கம், ஆய்விற்கு தேவையான தரவுகள் எவை, பொருத்தமான தரவு சேகரிப்பு முறை என்பன தீர்மானிக்கப்படுதல் மிக அவசியமாகும்.

தரவு பெறப்படும் மூலங்களின் அடிப்படையில் தரவுகளை பின்வருமாறு இரண்டாகப் பிரிக்கலாம்.

i. முதல் நிலைத் தரவுகள்

ii. இரண்டாம் நிலைத் தரவுகள்

முதல் நிலைத் தரவுகள் (Primary Data)

முதல் நிலைத் தரவுகள் ஒரு குறித்த ஆய்விற்காக ஆய்வாளனால் அல்லது அவருடைய உதவியாளர்களால் முதன்முதலாக நேரடியாக சேகரிக்கப்படுகின்ற தரவுகள் முதல் நிலைத் தரவுகள் எனப்படும்.

உதாரணம் : பசளை வகைகளின் விலை மட்டங்கள் தொடர்பாக விவசாயிகளிடம் கருத்துக்களைக் கேட்டல்.

முதல் நிலைத் தரவுகளைச் சேகரிக்கும் பல்வேறு முறைகள்

- நேரடி அவதானிப்பு
- சுயகணிப்பீட்டு முறை (வினாக்கொத்து முறை)
- தொலைபேசிக் கலந்துரையாடல் முறை
- நேர்முக உரையாடல் முறை
- இலத்திரனியல் மூலம் தரவுகளைச் சேகரித்தல் முறை
- குவிவாக்கப்பட்ட குழுக் கலந்துரையாடல் முறை

முதலாம் நிலைத் தரவு சேகரிப்பின் அனுகூலங்கள்

- சரியான தன்மையினைக் கொண்டிருத்தல்.

- ஆய்வின் நோக்கத்திற்கு ஏற்புடையதாக இருத்தல்.
- இற்றைப்படுத்தக் கூடியதாக இருத்தல்.
- தரவுகளில் உயர் நம்பகத்தன்மை காணப்படல்.

முதலாம் நிலைத் தரவு சேகரிப்பின் பிரதிகூலங்கள்

- செலவு கூடுதலாகக் காணப்படல்.
- தரவு சேகரிப்பதற்குக் கூடுதலான காலம் எடுத்தல்.
- ஆய்வொன்றை மேறகொள்வதற்கு சிரமமான நிலையின்போது முதலாம் நிலைத் தரவுகளைச் சேகரிக்க முடியாதிருத்தல்.

இரண்டாம் நிலைத் தரவுகள் (Secondary Data)

யாதேனும் நிறுவனமொன்று அல்லது நபரொருவர் ஏதேனும் ஆய்வொன்றிற்காகச் சேகரிக்கப்பட்ட, வெளியிடப்பட்ட அல்லது வெளியிடப்படாத தரவுகள் இரண்டாம் நிலைத் தரவுகள் என அழைக்கப்படும்.

உதாரணம்: காலநிலை அவதான நிலையத்தினால் வெளியிடப்படுகின்ற காலநிலைத் தரவுகள்.

இரண்டாம் நிலைத் தரவுகளை சேகரித்தல் முறைகள்

- குடிசனப் புள்ளிவிபரத் திணைக்களத்தின் அறிக்கை
- மத்திய வங்கி ஆண்டறிக்கை
- பத்திரிகை
- புத்தகங்கள்
- சஞ்சிகைகள்
- வலையமைப்புக்கள்
- நிறுவன நிதியறிக்கைகள

இரண்டாம் நிலைத் தரவுகளினால் கிடைக்கப் பெறும் நன்மைகள்

- குறைந்த செலவில் தரவுகளைப் பெற முடிதல்.

- குறுகிய காலத்தில் ஆய்வை முடிக்கக் கூடியதாகவிருத்தல்.

இரண்டாம் நிலைத் தரவுகளினால் கிடைக்கப் பெறும் பிரதிகூலங்கள்

- ஆய்வின் நோக்கத்திற்குப் பொருத்தமற்றிருத்தல்.
- காலம் கடந்த தரவுகளாகக் காணப்படல்.
- அத்தரவுகள் பல்வேறு நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் சேகரிக்கப்பட்டிருத்தல்.

தரவு சேகரிப்பிலுள்ள பிரச்சினைகள்

திருத்தம் (Accuracy) : தரவுகளின் அளவீடுகள் தரவு தொடர்பான பிழையற்ற தகவலைக் கொண்டு காணப்படுகின்றது என்பதை உறுதி செய்வதாகும்.

துல்லியம் (Precision): ஒரே சூழ்நிலையின் கீழ் மேற்கொள்ளப்பட்ட ஆய்வு முடிவுகளுக்கிடையில் காணப்படும் ஒற்றுமையை குறிக்கும்.

பொருத்தப்பாடு (Validity): பெறப்பட்ட முடிவுகள் ஆய்வினை பிரதிபலிக்கின்றதா என்பதை காட்டுவதாகும்.

- உள்ளக பொருத்தப்பாடு (Internal Validity): பெறப்பட்ட முடிவுகள் எடுத்துக் கொண்ட பொருளுக்கு பொருத்தமானதா?
- வெளியக பொருத்தப்பாடு (External Validity) : பெறப்பட்ட முடிவுகள் மாதிரியை பெற்ற குடிக்கு பொருத்தமானதா? (பொதுமயமாக்கல்)

சுருக்கம்

தரவுகளின் தன்மைக்கேற்ப தரவுகளை பண்பறி தரவுகள், கணியத் தரவுகள் என இரண்டு வகைகளாக வகைப்படுத்தலாம். கணியத் தரவுகளை மேலும் பின்னகத் தரவுகள், தொடர்ச்சித் தரவுகள் என இரண்டு வகைகளாக வகைப்படுத்தலாம.

தரவுகளின் அளவீட்டு மட்டங்களின் அடிப்படையில் பெயரியல் தரவுகள், வரிசைத் தரவுகள் ஆயிடைத் தரவுகள், விகிதத் தரவுகள் என வகைப்படுத்தலாம்.

தரவு பெறப்படும் மூலங்களின் அடிப்படையில் தரவுகளை முதல் நிலைத் தரவுகள், இரண்டாம் நிலைத் தரவுகள் என இரண்டாகப் பிரிக்கலாம்.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. பண்பு சார், அளவு சார் தன்மை எனும் சொற்பதங்களை உதாரணங்களடன் விளக்குக?
2. பின்வரும் கூற்றுக்கள் அளவு சார் தரவா, பண்பு சார் தரவா எனக்கூறி நியாயப்படுத்துக?
   a. ஓர் நிறுவனத்தில் ஓர் குறிப்பிட்ட தினத்தில் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களின் எண்ணிக்கை
   b. ஓர் நிறுவனத்தில் ஓர் குறிப்பிட்ட தினத்தில் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களின் அரைவாசியிலும் கூடுதலானவை பழுதானவை
3. பண்பு சார் கூற்றிற்கு 3 உதாரணம் தருக? இவைகள் ஒவ்வொன்றையும் அளவு சார் கூற்றாக மாற்றுக?
4. ‘‘இரண்டாம் நிலைத் தரவை விட முதலாம் நிலைத் தரவு சிறந்தது’’. இக்கூற்றினை ஏற்றுக்கொள்கின்றீரா? கருத்துரைக்க

திறவுச் சொற்கள்

பண்புத் தரவுகள், கணியத் தரவுகள், பெயரியல் தரவுகள், வரிசைத் தரவுகள் ஆயிடைத் தரவுகள், விகிதத் தரவுகள்

உசாத்துணை நூற்கள்

Freeman, J., Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., & Shoesmith, E. (2017). *Statistics for Business and Economics*. (4th ed.). Cengage

Gupta, C.S. (2013). *Fundamentals of Statistics*. Himalaya Publishing House

McClave, B., & Sincich. (2001). *Statistics for Business and Statistics*. Prentice Hall.

அத்தியாயம் - 3

தரவுகளை ஒழுங்கமைத்தலும் சமர்ப்பித்தலும்

பொருளடக்கம் பக்கம்

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

தரவுகளை இலகுவாக கையாள்வதற்கும் பகுப்பாய்வு செய்வதற்கும் அவை தொகுக்கப்படல் அவசியமாகும். தரவுகளானது சேகரிக்கப்பட்ட பின்னர் அவற்றை சுருக்கமாகவும் தெளிவாகவும் சமர்ப்பித்தல் புள்ளிவிபரவியலில் ஒரு முக்கியமான படியாகும். இது பின்வரும் வகைகளில் இடம்பெறும்.

1. அட்டவணை வடிவில் சமர்ப்பித்தல்
2. வரைபடங்கள் மற்றும் வரைபுகள் மூலம் சமர்ப்பித்தல்

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

புள்ளிவிபரவியல் தரவுகளை அட்டவணை, வரைபடங்கள் மற்றும் வரைபுகள் வடிவில், எவ்வாறு சமர்ப்பித்தல் என்பது தொடர்பாக விளக்குதல்

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் தரவுகளை வரைபுகள் மற்றும் அட்டவணை வடிவில் சமர்ப்பிக்க முடியுமாக இருப்பர்.

அட்டவணை மூலம் தரவுகளை சமர்ப்பித்தல்

தரவுகளைத் தொகுத்து தரப்படுத்தி, ஒழுங்குபடுத்தி, சுருக்கி அட்டவணையில் அமைக்கின்றோம். மாறிகளின் பண்புகளைக் கொண்டு அவற்றை பல்வேறுபட்ட அட்டவணைகளில் வெளிக்காட்டலாம்

பூரணமான அட்டவணையொன்றில் காணப்பட வேண்டிய பண்புகள்

- அட்டவணை இலக்கம்
- குறிப்பிட்ட தலைப்பொன்று காணப்படுதல்
- நிரல்கள், நிரைகள், தலைப்புக்கள், உபதலைப்புகள் என்பவற்றை இடல்
- தரவுகள் முன்வைக்கப்பட்ட அலகுகளைக் காட்டுதல்
- தேவையான இடங்களில் கூட்டுத் தொகையினையும், மொத்தக் கூட்டுத் தொகையினையும் காட்டுதல்
- தரவு மூலங்களைக் காட்டுதல்
- அடிக்குறிப்புக்களை இடுதல்

உதாரணம்:

பாடசாலையொன்றின் தரம் 12 இன் வரவு இடாப்பிலிருந்து ஒரு வாரத்தில் பெற்றுக் கொள்ளப்பட்ட மாணவர்களின் வரவு பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது. திங்கள் 25 மாணவிகளும், 15 மாணவர்களுமாக மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிகக்க 40 ஆகவும், செவ்வாய் 28 மாணவிகளும், 17 மாணவர்களுமாக மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிகக்க 45 ஆகவும், புதன் 30 மாணவிகளும், 20 மாணவர்களும், வியாழன் 30 மாணவிகளும், 16

மாணவரக்ளும், வெள்ளி 20 மாணவிகளும், 15 மாணவர்களும் இருந்தனர்.

அட்டவணை – 1: தரம் 12 ஒரு வாரத்தில் மாணவர்களின் வருகை

நாள்	வருகை		
	மாணவிகள்	மாணவர்கள்	மொத்தம்
திங்கள்	25	15	40
செவ்வாய்	28	17	45
புதன்	30	20	50
வியாழன்	30	16	46
வெள்ளி	20	15	35

மூலம்: தரம் 12 வரவு இடாப்பு

தரவு அட்டவணையின் அனுகூலங்கள்

- இழிவுப் பெறுமானத்தையும் உச்ச பெறுமானத்தையும் தெளிவாக இனங்காண முடியும்.
- தரவுகளின் அடையாளத்தை பாதுகாக்க முடிதல்.

தரவு அட்டவணையின் பிரதிகூலங்கள்

- அதிக எண்ணிக்கை கொண்ட தரவுகளை ஒழுங்கமைப்பதற்குப் பொருத்தமற்றது.
- விரிவுபட்ட தரவுகள் உட்படுவதற்கான சந்தர்ப்பம் உண்டு.
- தரவுகளைச் சுருக்கமாகக் முடியாதிருத்தல்.

வகுப்பாக்கப்படாத மீடிறன் பரம்பல் (Ungrouped Frequency Distribution)

அவதானிப்பு கூடுதலான எண்ணிக்கையில் காணப்படும் போதும், குறைவான வீச்சில் தரவுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக உள்ள போதும் அவற்றை வரிசைப்படுத்துவது கடினமாகும் அதேவேளை

பெறப்பட்ட தரவுகளைக் கையாள்வதும் சிரமமாகும். எனவே மீண்டும் மீண்டும் இடம்பெறும் தரவுகளை ஒன்று சேர்த்து மேலும் தரவுகளை தொகுக்கலாம். இது வகுப்பாக்கப்படாத மீடிறன் பரம்பல் என அழைக்கப்படும்.

உதாரணம்:

பின்வரும் தரவுத் தொகுதிக்குரிய கூட்டமாக்கப்படாத மீடிறன் பரம்பலினை அமைக்குக.

10, 15, 10, 12, 13, 14, 10, 12, 15, 12
13, 14, 15, 13, 12, 13, 10, 11, 12, 13

அவதானிப்பு (X)	**வரவுக்குறி**	**மீடிறன் (f)**
10	////	4
11	/	1
12	/ⵍ/	5
13	/ⵍ/	5
14	//	2
15	///	3
மொத்த மீடிறன்		20

உதாரணம்:

ஒரு வகுப்பின் 30 மாணவர்கள் தவணைப் பரீட்சையில் புள்ளிவிபரவியல் பாடத்தில் பெற்றுக் கொண்ட புள்ளிகள் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.

02, 49, 23, 19, 75, 99, 65, 39, 45, 62

25, 55, 70, 50, 35, 60, 72, 40, 42, 45

63, 50, 59, 48, 64, 65, 78, 79, 80, 79

இத் தரவு ஒழுங்கமைப்பிற்குக் கூட்டமாக்கப்படாத மீடிறன் பரம்பலானது பொருத்தமற்றது. தரவுகள் கூடிய வீச்சினைக் கொண்டதாக பரம்பிக் காணப்படுகின்ற போது கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பல் அவசியமாகின்றது.

கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பல் அமைப்பதன் படிமுறைகள்

1. வீச்சு $= 99 - 2 = 97$
2. வகுப்புக்களின் எண்ணிக்கையினை 5 ஆக எடுத்து அதன் பருமனைத் தீர்மானித்தல்.
3. வகுப்புக்களின் பருமன் 20 ஆகக் கருதி வகுப்பாயிடையினைத் தயாரித்தல்.

   வகுப்பின் பருமன் $= \frac{97}{5} = 19.4$

பெற்றுக் கொள்ளப்பட்ட புள்ளிகள்	**வரவுகக்குறி**	**மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f)**
1 - 20	//	2
21 - 40	////	5
41 - 60	//// ////	10
61 - 80	//// //// //	12
81 - 100	/	1
மொத்த மீடிறன்		30

தரவுகள் தொடர்ச்சியானவை எனின் வகுப்பாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலின் வகுப்பாயிடைகள் பின்வருமாறு தொடர்ச்சியானவைகளாக மாற்றப்படல் வேண்டும்.

பெற்றுக் கொள்ளப்பட்ட புள்ளிகள்	**வரவுகக்குறி**	**மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f)**
0.5 - 20.5	//	2
20.5 - 40.5	////	5
40.5 - 60.5	//// ////	10
60.5 - 80.5	//// //// //	12
80.5 – 100.5	/	1
மொத்த மீடிறன்		30

கீழ் எல்லை மற்றும் மேல் எல்லைப் பெறுமானங்கள்

20.5 – 40.5 என்ற வகுப்பாயிடையைக் கருதின் 20.5 என்பது அதன் கீழ் எல்லைப் பெறுமானம் (Lower Class Boundary- LCB) எனவும்

40.5 என்பது அதன் மேல் எல்லைப் பெறுமானம் (Upper Class Boundary -UCB) எனவும் அழைக்கப்படும்.

நடுப் பெறுமானம் (Mid-Point / Class Mark)

வகுப்பாயிடை ஒன்றின் நடுப் பெறுமானம் பின்வருமாறு கணிக்கப்படும்.

$$\text{நடுப் பெறுமானம்} = \frac{\text{மேல் எல்லைப் பெறு} + \text{கீழ் எல் பெறு}}{2}$$

$$= \frac{20.5+40.5}{2}$$

$$= 30.5$$

திரள் மீடிறன் பரம்பல் (Cumulative Frequency Distribution)

திரள் மீடிறன் பரம்பலானது குறித்த வகுப்பின் மீடிறனுடன் அதற்கு மேல் உள்ள எல்லா வகுப்புகளின் மீடிறன்களையும் கூட்டுவதன் மூலம் அமைக்கப்படும். இது அதிகரிக்கும் திரள் மீடிறன் பரம்பல் என அழைக்கப்படும்.

மறுதலையாக மொத்த மீடிறனிலிருந்து குறித்த வகுப்பின் கீழ் எல்லைப் பெறுமானத்திற்கு குறைவான தரவுகளின் மீடிறனைக் கழிப்பதன் மூலம் குறைவடையும் திரள் மீடிறன் பரம்பல் அமைக்கப்படும்.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்	அதிகரிக்கும் திறள் மீடிறன்	குறைவடையும் திறள் மீடிறன
15.5 - 20.5	0	0	25
20.5 - 25.5	2	2	25
25.5 - 30.5	5	7	23
30.5 - 35.5	12	19	16
35.5 - 40.5	4	23	4
40.5 - 45.5	2	25	0

தரவுகளை வரைபட ரீதியாக முன்வைத்தல்

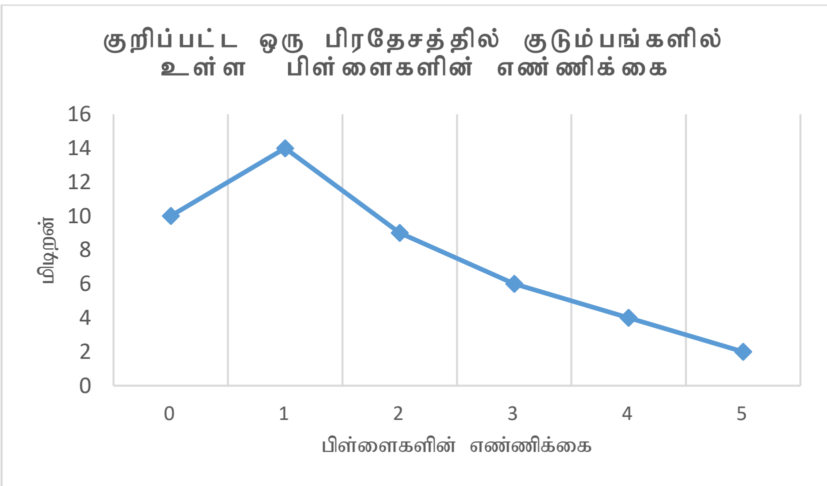
ஆய்வு செய்வதற்கும் சரியான தீர்மானங்களை எடுப்பதறகும் இலகுவான வகையில் அவற்றை முறையாகவும் தெளிவாகவும் முன்வைப்பதற்கான தேவை காணப்படுகின்றது. அவற்றினை பல்வேறு வரை படங்களினூடாக வெளிப்படுத்த முடியும். தரவுகளை வரைபடரீதியாக முன்வைப்பதன் மூலம் அத்தரவுகளின் மாற்றங்களின் போக்குகள் தொடர்பான பருமட்டான தெளிவினை பெற்றுக் கொள்ள முடியும்.

தரவுகளின் தன்மை, அளவு, முன்வைக்கும் நோக்கம் போன்ற காரணிகளைக் கருத்தில் கொண்டு தரவுகளுக்குப் பொருத்தமான வகையில் பயன்படுத்தக் கூடிய பல்வேறு வரைபடங்கள் காணப்படுகின்றன.

1. **கோட்டு வரைபடம்**

குறிப்பிட்டதொரு பிரதேசத்தில் குடும்பங்களில் உள்ள பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.

பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
மீடிறன்	10	14	9	6	4



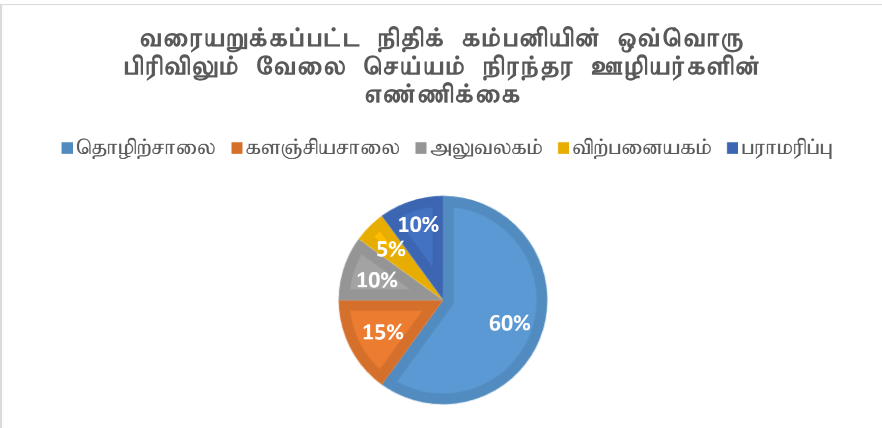
2. பை வரைபடம் (Pie Chart)

வரையறுக்கப்பட்ட நிதிக் கம்பனியின் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் வேலை செய்யும் நிரந்தர ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை பின்வரும் அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

திணைக்களம்	ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை
தொழிற்சாலை	240
களஞ்சியசாலை	60
அலுவலகம்	40
விற்பனையகம்	20
பராமரிப்பு	40
மொத்தம்	400

வட்ட வரைபினை வரையும்போது பின்பற்ற வேண்டிய படிமுறைகள்

திணைக்களம்	ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை	மையத் தொகுதியின் பருமன்
தொழிற்சாலை	240	216^0
களஞ்சியசாலை	60	54^0
அலுவலகம்	40	36^0
விற்பனையகம்	20	18^0
பராமரிப்பு	40	36^0
மொத்தம்	400	360^0



3. சிதறல் வரைபடம்

இரு மாறிகளுக்கிடையிலான இணைப்பைக் காட்டும் வரைபடம் சிதறல் வரைபடம் எனப்படும்.

x	y
1.0	7.5
2.0	8.9
3.0	6.9
4.0	5.2
5.0	8.4
6.0	5.1
7.0	4.4
8.0	6.8
9.0	6.0
10.0	3.9

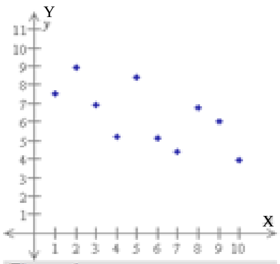


Figure 1

u	v
1.0	3.1
2.0	4.4
3.0	3.7
4.0	4.8
5.0	4.5
6.0	6.8
7.0	6.0
8.0	7.4
9.0	6.9
10.0	8.0

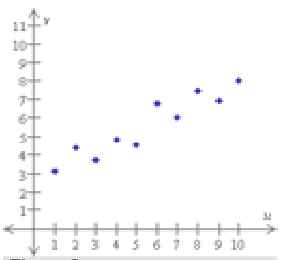


Figure 2

w	t
1.0	10.0
2.0	9.0
3.0	8.0
4.0	7.0
5.0	6.0
6.0	5.0
7.0	4.0
8.0	3.0
9.0	2.0
10.0	1.0

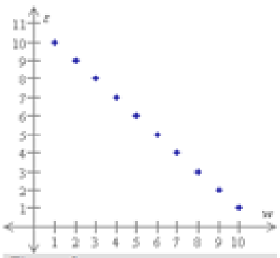


Figure 3

m	n
1.0	8.2
2.0	4.6
3.0	10.4
4.0	6.2
5.0	2.6
6.0	5.4
7.0	9.0
8.0	3.2
9.0	9.3
10.0	6.7

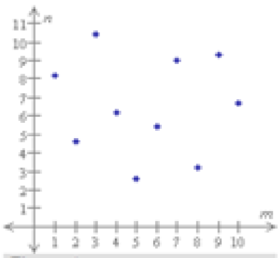


Figure 4

4. சலாகை வரைபடம்

எளிய நிலைக்குத்துச் சலாகை வரைபடம் (Simple Vertical Bar Chart)

ஏதேனும் மாறியொனறின் பெறுமானஙக்ளை நிரலொன்றின் உயரம் அல்லது நீளத்தின் மூலமாக வெளிப்படுத்தப்படுகின்ற குறிப்பே எளிய நிரல் வரைபாகும். நிரல் வரைபுகள் நிலைக்குத்து சலாகை வரைபு அல்லது கிடைச் சலாகை வரைபு என இரு வகைப்படும்.

சலாகை வரைபுகளை வரையும் போது பின்வரும் விடயங்கள் தொடர்பில் கவனம் செலுத்தப்படல் வேண்டும்.

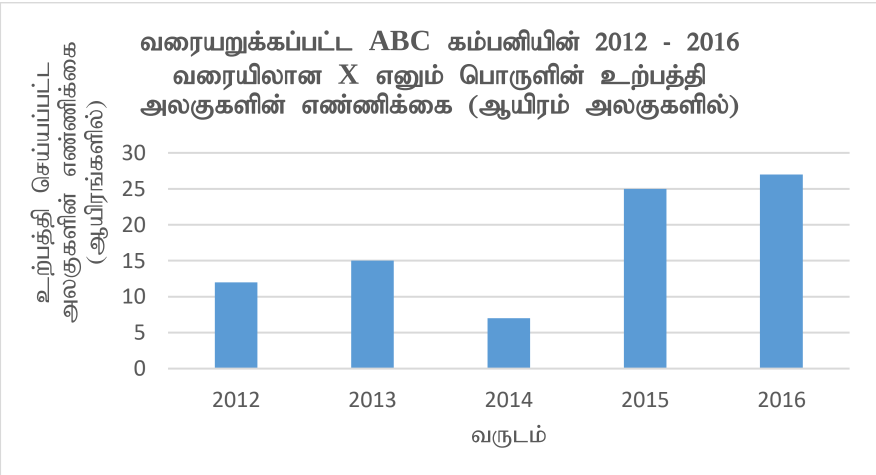
- சகல நிரல்களினதும் அகலங்கள் சமமானதாக இருத்தல் வேண்டும்.

- நிரல்களுககிடையில் சமமான இடைவெளி இருத்தல் என்பதுடன் நிலைக் குத்து அல்லது கிடையச்சிற்கும் முதல் நிரலிற்குமிடையில் அவ்விடைவெளியினைப் பேணுதல் வேண்டும்.
- நிரலின் உச்சியில் ஒத்த பெறுமானமொன்றை இடுதல் மிகப் பொருத்தமானது.
- வரைபட இலக்கம், தலைப்பு, தரவு மூலங்கள் மற்றும் அச்சுக்களுக்கு பெயரிட்டு காட்டுதல் என்பன பொருத்தமானது.

வரையறுக்கப்பட்ட ABC கம்பனியின் 2012 - 2016 வரையிலான X எனும் பொருளின் உற்பத்தி அலகுகளின் எண்ணிக்கை (ஆயிரம் அலகுகளில் பின்வருமாறு

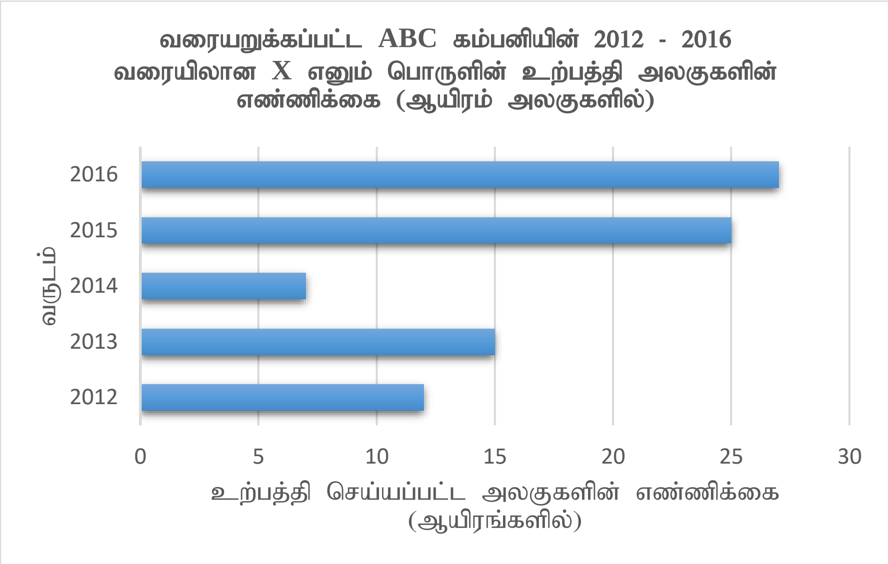
வருடம்	**உற்பத்தி செய்யப்பட்ட அலகுகளின் எண்ணிக்கை (ஆயிரங்களில்)**
2012	12
2013	15
2014	07
2015	25
2016	27

நிலைக்குத்துச் சலாகை வரைபடம்



மூலம்: களஞ்சிய பேரேடு

கிடைச் சலாகை வரைபடம்



மூலம்: களஞ்சிய பேரேடு

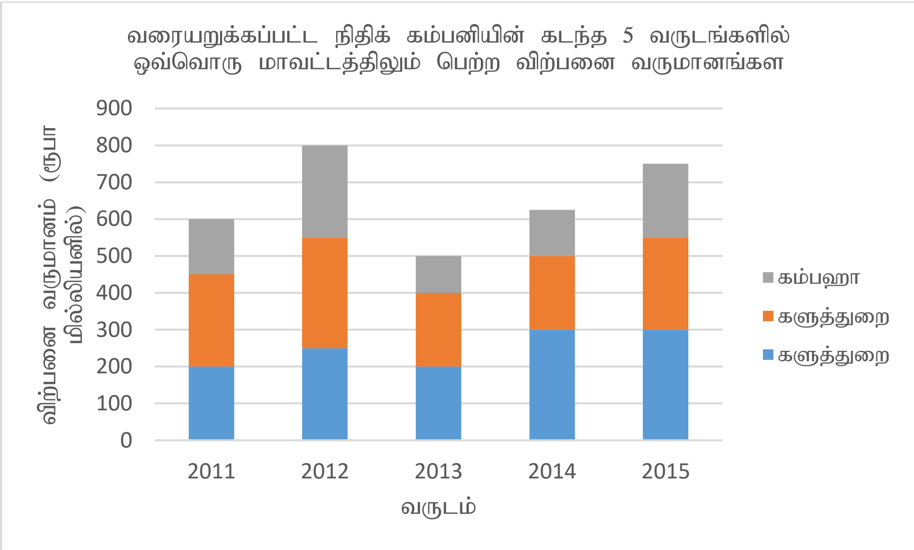
கூட்டுச் சலாகை வரைபடம் (Component Bar Chart)

- குறிப்பிட்ட மாறி பல்வேறு கூறுகளை உள்ளடக்கி காணப்படும் போது கூறுகளின் மாற்றங்களை வெளிப்படுத்துவதற்காக கூட்டுச் சலாகை வரைபு பயன்படுத்தப்படுகின்றது.
- கூறுகளை வீதமாகக் காட்டி கூட்டுச் வீதச் சலாகை வரைபு வரையப்படும்.
- இங்கு ஒவ்வொரு கூறுகளையும் தெளிவாக ஒப்பிடக் கூடியவாறு பொருத்தமான சாவியொன்று பயன்படுத்தப்படல் வேண்டும்.

உதாரணம் :

வரையறுக்கப்பட்ட நிதிக் கம்பனியின் கடந்த 5 வருடங்களில் ஒவ்வொரு மாவட்டத்திலும் பெற்ற விற்பனை வருமானங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

வருடம்	விற்பனை வருமானம் (ரூபா மில்லியனில்)			
	கொழும்பு	**கம்பஹா**	**களுத்துறை**	**மொத்தம்**
2011	200	250	150	600
2012	250	300	250	800
2013	200	200	100	500
2014	300	200	125	625
2015	300	250	200	750



மூலம்: களஞ்சிய பேரேடு

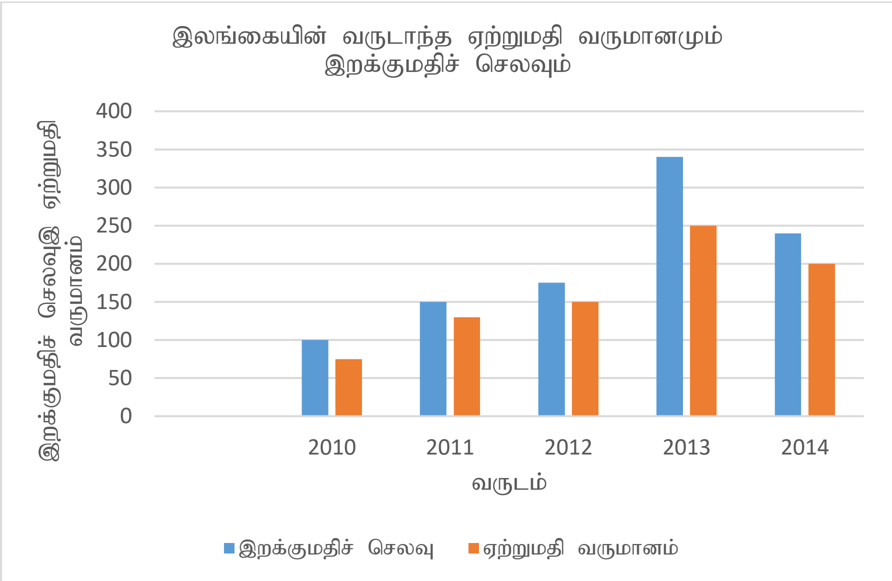
பல்மடிச் சலாகை வரைபடம் (Multiple Bar Chart)

- ஏதாவது மாறியொன்று ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புடைய நிகழ்வுகள் பலவற்றின் மாற்றங்ளைக் காட்டுவதற்கு பல்மடிச்சலாகை வரைபு பயன்படுத்தப்படுகின்றது.
- நிகழ்வுக்குரிய நிரல்கள் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புபட்டிருக்குமாறு வரைவதன் மூலம் பல்மடிச் சலாகை வரைபை உருவாகக் முடியும்.

உதாரணம்:

இலங்கையின் வருடாந்த ஏற்றுமதி வருமானமும் இறக்குமதிச் செலவும் (மில்லியன் ரூபாய்களில்) பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.

வருடம்	இறக்குமதிச் செலவு	ஏற்றுமதி வருமானம்
2010	100	75
2011	150	130
2012	175	150
2013	340	250
2014	240	200



மூலம்: ஆண்டறிக்கை

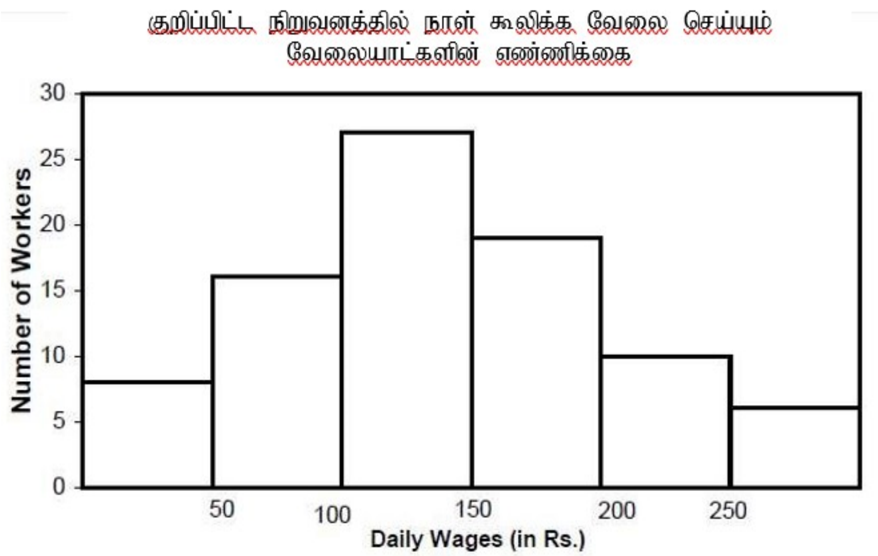
வலையுரு வரைபு (HISTOGRAM)

வகுப்புக்களாக்கப்பட்ட தரவினை வரைபடத்தில் காட்டுவதற்காக பயன்படுத்தக்கூடிய வரைபு வலையுருவரையமாகும். வலையுருவரையத்தில் சலாகைகள் வகுப்பாயிடைப் பருமனுக்கேற்ப இடைவெளியின்றி நிலைக்குத்தாக அவற்றின் மீடிறன் பருமனிற்கேற்ப வரையப்படுகின்றது.

உதாரணம்:

குறிப்பிட்ட நிறுவனத்தில் நாள் கூலிக்கு வேலை செய்யும் வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது

நாள் கூலி	வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை
0 - 50	8
50-100	16
100-150	27
150-200	19
200-250	10
250-300	6



மீடிறன் பல்கோணி

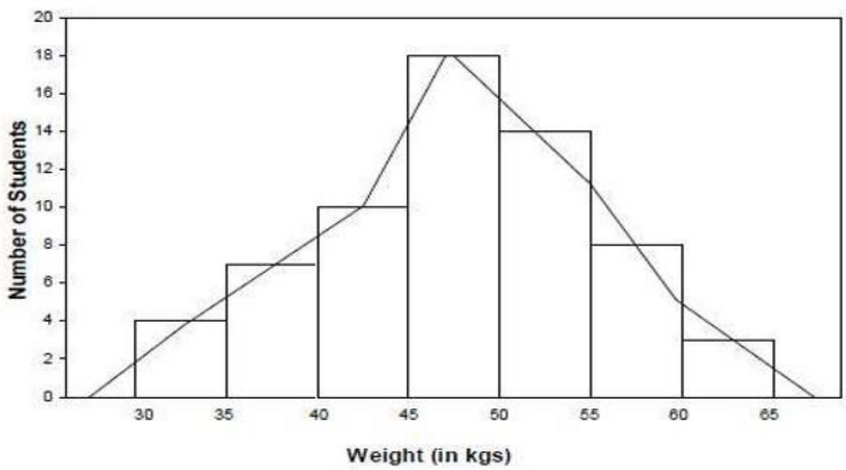
வலையுரு வரையத்திலுள்ள சலாகைகளின் உச்சிகளின் நடுப்புள்ளிகளை ஓர் நேர்கோட்டினால் இணைக்கும் போது பெறப்படக்கூடிய ஓர் மூடிய பல்கோணி மீடிறன் பல்கோணி ஆகும். மீடிறன் பல்கோணியினுள் உள்ளடக்கக்கூடிய மொத்தப் பரப்பானது வலையுரு வரையத்தின் மூலம் உள்ளடக்கக்கூடிய மொத்தப் பரப்பிற்கு சமனாகும்.

உதாரணம்:

தரம் 07 இல் கல்வி பயிலும் மாணவர்களின் நிறை பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.

நிறை	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
30-35	4
35-40	7
40-45	10
45-50	18
50-55	14
55-60	8
60-65	3

தரம் 07 இல் கல்வி பயிலும் மாணவர்களின் நிறை



மீடிறன் வளையி

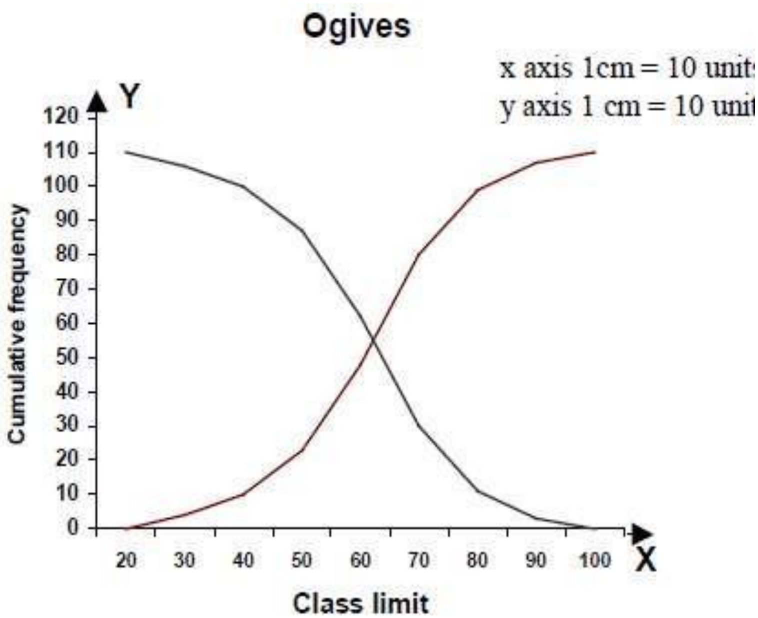
ஒரு வலையுரு வரையத்திலுள்ள சலாகைகளின் பருமன் (வகுப்பாயிடைப் பருமன்) சிறியதாக இருக்கும் போது மீடிறன் பல்கோணி ஒரு வளையியாகப் பெறப்படும். இவ்வளையி மீடிறன் வளையி எனப்படும்.

திரள் மீடிறன் வளையி

தரவுகளின் திறள் மீடிறனுக்கு வரையக் கூடிய வளையி திறள் மீடிறன் வளையி எனப்படும். கீழ் திரள் மீடிறன் வளையி, மேல் திரள் மீடிறன் வளையி ஆகிய இரு வளையிகளையும் இணைத்து கொண்ட வளையி ஓகிவ் வளையி எனப்படும்.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்
20 - 30	4
30 - 40	6
40 - 50	13
50 - 60	25
60 - 70	32
70 - 80	19
80 - 90	8
90- 100	3

வகுப்பாயிடை எல்லை	அதிகரித்துச் செல்லும் திறள் மீடிறன்	குறைந்து செல்லும் திறள் மீடிறன்
20	0	110
30	4	106
40	10	100
50	23	87
60	48	62
70	80	30
80	99	11
90	107	3
100	110	0



சுருக்கம்

தரவுகளானது சேகரிக்கப்பட்ட பின்னர் அவற்றை சுருக்கமாகவும் தெளிவாகவும் அட்டவணை வடிவிலும் வரைபடங்கள் மற்றும் வரைபுகள் மூலமும் சமர்ப்பிக்கலாம்.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. சேகரிக்கபட்ட கள நிலத் தரவுகளை ஒழுங்குபடுத்தலினதும் சமர்ப்பித்தலினதும் நோக்கங்களை விளக்குக.
2. ஒரு தரவு அட்டவணையினை அமைக்கும் போது கவனத்தில் கொள்ளப்பட வேண்டிய விடயங்கள் யாவை?
3. 2014 இல், ஒரு தொழிற்சாலையின் 2000 மொத்த தொழிலாளர்களில் 1500 பேர் நிரந்தர சேவையில் உள்ளனர். பெண் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை 300 என்பதுடன் அவர்களில் 200 பேர் தற்காலிக சேவை நிலையிலும் உள்ளனர். 2017 இல் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை 2800 ஆக அதிகரித்தது. அவற்றில் 2000 பேர் ஆண்கள். ஆதேவேளை தற்காலிக பதவி நிலையில் உள்ள தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை 250 ஆக குறைந்தது. அவற்றில் 150 பேர் பெண்கள். மேற்தரப்பட்ட தரவுகளை பொருத்தமான ஒரு அட்டவணையில் தருக.
4. Brandix உற்பத்தி நிறுவனத்தின் 2020 ஆம் ஆண்டின் ஒவ்வொரு காலாண்டுக்குமான உற்பத்திப் பெறுமானங்கள் பின்வருமாறு தரப்படுகிறது. இத்தரவுகளை வெளிப்படுத்தி காட்டுவதற்கு பொருத்தமான வரைபொன்றை வரைக.

உற்பத்திப் பிரிவுகள்	விற்பனை வருமானம் (ரூபா மில்லியனில்)			
	Iம் காலாண்டு	IIம் காலாண்டு	IIIம் காலாண்டு	IVம் காலாண்டு
குழந்தை ஆடைகள்	0.8	1.8	1.2	1.4
பெண்களின் ஆடைகள்	1.4	2.0	1.6	1.5
ஆண்களின் ஆடைகள்	1.2	2.2	1.8	1.6
மொத்தம்	3.4	6.0	4.6	4.5

5. தெரிவு செய்யப்பட்ட சில நிறுவனங்களின் வருடாந்த செலவு தொடர்பான தரவுகள் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது. நிறுவனங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு கூறாக்கப்பட்ட சலாகை வரைபு, வட்ட வரைபு வளைபுகளை வரைக.

நிறுவனங்கள்	வருடாந்த செலவுகள் (ரூபாவில்)		
	நுகர்வ செலவு	முதலீட்டு செலவு	ஏனைய செலவு
A	300 000	400 000	150 000
B	350 000	250 000	100 000
C	400 000	350 000	250 000
D	500 000	300 000	100 000

6. 50 அப்பிள்களின் நிறை கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது. இத் தரவினைப் பயன்படுத்தி மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணையை (Grouped Frequency Distribution) வகுப்பாயிடை பருமன் (Class Width) 5 ஆகவும் முதல் வகுப்பின் கீழ் எல்லை 85.5 (LCB) ஆகவும் கொண்டு தயாரிக்குக. இம் மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணையை பயன்படுத்தி, வலையுரு வரையம், மீடிறன் பல்கோணி, ஓகிவ் வளையியினை அமைக்குக.

86	113	92	97	118	116	101	100	113	117
105	108	108	118	93	87	92	105	103	102
100	101	99	99	101	101	111	93	86	100
104	102	92	92	107	107	96	96	116	110
103	106	114	106	109	95	105	101	98	88

திறவுச் சொற்கள்

மாறிகள், திரள் மீடிறன், வகுப்பாயிடை, மீடிறன், வலையுரு வரையம்

உசாத்துணை நூற்கள்

Freeman, J., Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., & Shoesmith, E. (2017). *Statistics for Business and Economics*. (4th ed.). Cengage

Gupta, C.S. (2013). *Fundamentals of Statistics*. Himalaya Publishing House

McClave, B., & Sincich. (2001). *Statistics for Business and Statistics*. Prentice Hall.

அத்தியாயம் - 4

மையநாட்ட அளவைகள் (குழுவாக்கப்பட்ட மற்றும் குழுவாக்கப்படாத தரவுகள்)

பொருளடக்கம் **பக்கம்**

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

ஒரு குடியில் உள்ள அலகுகள் கொள்ளும் பெறுமானங்களை சுருக்கமாகவும், எளிய முறையிலும் எடுத்துக் காட்டும் அளவீடுகளே மையநாட்ட அளவைகள் எனப்படும். ஒரு பகிர்வை விளக்கிக் காட்ட அளவு முறை விபரங்களை முறைப்படுத்தி கூறவேண்டியது மிக அவசியமாகும். இதில் மையநாட்ட அளவைகள் அடிப்படைக் கோட்பாடுகளாக விளங்குகினறன. எனவே மையநாட்ட அளவைகளை அமைவிடத்தின் அளவைகள் எனவும் அழைக்கலாம். இம்மையநாட்ட அளவைகள் இடை, இடையம், ஆகாரம் என மூன்று வகையாக அளவிடப்படுகின்றது.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

மையநாட்ட அளவைகள் (இடை, இடையம், ஆகாரம்) தொடர்பாக விளக்குதல்

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் குழுவாக்கப்பட்ட மற்றும் குழுவாக்கப்படாத தரவுகள் என்பவற்றிற்கு வெவ்வேறாக இடை, இடையம், ஆகாரம் என்பவற்றை கணிக்க முடியுமாக இருப்பர்.

மைய நாட்ட அளவைகள்

யாதேனும் மாறியொன்று தொடர்பில் சேகரிக்கப்பட்ட தரவுகள் புள்ளி யொன்றைச் சுற்றி பரந்திருக்கக்கூடிய பண்பு மையநாட்டம் என்றழைக்கப்படும். மையநாட்டத்தை அளவிடுவதற்காக இடை, இடையம், ஆகாரம் ஆகிய அளவீடுகளைப் பயன்படுத்த முடியும்.

ஆகாரம்

தரவு வரிசையொன்றில் அல்லது கூட்டமாக்கப்படாத மீடிறன் பரம்பலொன்றின் கூடுதலான தடவைகள் உள்ள தரவு ஆகாரம் எனப்படும். தரவுகள் கூடுதலான அளவில் ஏதேனும் பெறுமானமொன்றை நோக்கி திரண்டிருக்கும் சந்தர்ப்பத்தின் போது. பெரும்பான்மை அடிப்படையில் தீர்மானமெடுக்க வேண்டிய சந்தர்ப்பங்களின் போது, பண்பு ரீதியான மாறிகள் தொடர்பில் சேகரிக்கப்பட்ட தரவுகள் காணப்படும் சந்தர்ப்பத்தின் போது ஆகாரத்தினைக் கணித்தல் மிகவும் பொருத்தமானதாக அமைகின்றது.

உதாரணம்

10 ஊழியர்கள் வருடமொன்றில் பெற்றுக் கொண்ட விடுமுறை தினங்களின் எண்ணிகக்க பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.

15 , 13, 15, 16, 14, 16, 15, 14, 17, 14

இங்கு ஆகாரமாக 14 கொள்ளப்படுகின்றது.

கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலுக்குரிய ஆகாரத்தை கணிப்பிடுவதற்கு பின்வரும் சூத்திரம் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

$$\mathrm{M_0} = \mathrm{L_1} + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right] \mathrm{c}$$

L_1 : ஆகார வகுப்பாயிடையின் கீழ் உண்மை எல்லை

Δ_1: ஆகார வகுப்பாயிடையின் மீடிறனுக்கும் ஆகார வகுப்பின் மேல் வகுப்பின் மீடிறனுக்கும் இடையிலான வித்தியாசம்

Δ_2 : ஆகார வகுப்பின் மீடிறனுக்கும் ஆகார வகுப்பின் கீழ் வகுப்பின் மீடிறனுக்கும் இடையிலான வித்தியாசம்

C : ஆகார வகுப்பின் பருமன்

உதாரணம் :

தொழிற்சாலையொன்றின் அன்றாடக் கூலி பெறும் பணியாளர்கள் 10 பேரின் அன்றாடக் கூலிகள் தொடர்பான மீடிறன் பரமப்லொன்று கீழே தரப்படுகின்றது. ஆகாரத்தின் பெறுமதியினைக் கணிக்குக.

கூலி ரூபா	**ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை**
501 - 550	04
551 - 600	15
601 – 650	**35**
651 – 700	29
701 – 750	10
751 – 800	07

ஆகார வகுப்பு 601 - 650

L_1 - 601 (600.5)

Δ_1 - (35 - 15)

Δ_2 - (35 - 29)

C - 50

$$M_0 = L_1 + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right] c$$

$$M_0 = 600.5 + \left[\frac{20}{20+6}\right] 50$$

$$M_0 = 638.96$$

இடையம்

தரவுகளை ஏறுவரிசை அல்லது இறங்கு வரிசை முறையில் ஒழுங்குபடுத்தும் போது மத்தியில் அமையும் தரவு இடையம் எனப்படும்.

உதாரணம்:

10 ஊழியர்கள் வருடமொன்றில் பெற்றுக் கொண்ட விடுமுறை தினங்களின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.

விடுமுறை நாள்கள்	பணியாளர்கள் **(f)**	**(cf)**
13	1	1
14	3	4
15	3	7
16	2	9
17	1	10

அவதானிப்புக்கள் இரட்டை எண்ணாக அமையம் போது $\frac{n+1}{2}$ எனும் இடத்தில் இருக்கும் பெறுமானம் இடையத்தைக் குறித்து நிற்கும்.

$$\text{md} = \frac{\text{n}+1}{2}$$

$$= \frac{11}{2} = 5.5$$

$$\text{md} = 15$$

கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்றின் இடையத்தைக் கணிப்பிடுவதற்கு பின்வரும் சூத்திரம் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

$$\text{md} = \text{L}_1 + \left[\frac{\frac{\text{n}}{2} - \text{cf}}{\text{fm}}\right] C$$

$\frac{n}{2}$ எனும் பெறுமானத்தைக் கொண்ட வகுப்பு இடைய வகுப்பாகும்.

L_1 : இடைய வகுப்பின் கீழ் உண்மை எல்லை

n : அவதானிப்புக்களின் எண்ணிக்கை

fm : இடைய வகுப்பின் மீடிறன்

cf : இடைய வகுப்பிற்கு முன்னைய வகுப்பின் திரள் மீடிறன்

c : இடைய வகுப்பின் பருமன்

உதாரணம்:

தொழிற்சாலையொன்றின் அன்றாடக் கூலி பெறும் பணியாளர்கள் 10 பேரின் அன்றாடக் கூலிகள் தொடர்பான மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இடையத்தின் பெறுமதியினைக் கணிக்குக.

கூலி	ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை	திரள் மீடிறன் **(cf)**
501 - 550	4	4
551 - 600	13	19
601 - 650	**35**	**54**
651 - 700	29	83
701 - 750	10	93
751 - 800	07	100

இங்கு மொத்த அவதானிப்புக்களின் எண்ணிக்கை = 100

இடையப் பெறுமானம் = $\frac{n}{2}$ ஆவது அவதானிப்பு பெறுமானமாகும்.

$\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$ ஆவது ஊழியரினை உள்ளடக்கும் வகுப்பாயிடை : 601 - 650

$$\mathrm{md} = \mathrm{L}_1 + \left[\frac{\frac{\mathrm{n}}{2} - \mathrm{cf}}{\mathrm{fm}}\right] \mathrm{c}$$

$$\mathrm{md} = 600.5 + \left[\frac{50-19}{35}\right] 50$$

$$\mathrm{md} = 600.5 + \left[\frac{31}{35} \times 50\right]$$

$$\mathrm{md} = 600.5 + 44.29$$

$$\mathrm{md} = 644.79$$

இடை

தரவுத் தொகுதியின் அனைத்துப் பெறுமானங்களினதும் கூட்டுத்தொகையை தரவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையினால் வகுப்பதன் மூலம் கிடைக்கும் பெறுமானம் இடை எனப்படும். தரவுகள் அளவுரீதியான மாறிகள் அதாவது பொருட்களின் நிறை, நீளம், விற்பனை வருமானங்கள் பரீட்சைப் புள்ளிகள் போன்ற சந்தர்ப்பங்களில் இடை பொருத்தமாக அமைகின்றது. தரவுகள் N எண்ணிக்கையில் இருக்கும் தரவுத் தொகுதியொன்றின் ஒவ்வொரு தரவுகள் x_1, x_2, x_3, ... x_N ஆக இருப்பின் குடியின் இடை பின்வருமாறு பெறப்படும்.

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

உதாரணம் :

பின்வரும் தரவுத் தொகுதியின் இடையைக் காண்க.

4 , 3.8, 4.1, 4, 3.9, 3.8, 4, 4, 3.8, 3.9, 4, 3.8

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum x}{n} = \frac{4+3.8+4.1+4+3.9+3.8+4+4+3.8+3.9+4+3.8}{12}$$

$$= 3.925$$

கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்றின் இடையைக் கணித்தல்

கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலின் போது வகுப்பின் நடுப் பெறுமானங்களை x எனக் கருதி பின்வரும் முறையினைப் பயன்படுத்தி இடை கணிப்பிடப்டுகின்றது.

உதாரணம்:

ஒரு பெட்டியில் காணப்படும் ஆணிகளின் நீளம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. ஆணிகளின் இடையினைக் காண்க.

ஆணியொன்றின் நீளம் (x)	ஆணிகளின் எண்ணிக்கை (f)	எண்ணிக்கை (fx)
3.8	4	15.2
3.9	2	7.8
4.0	5	20.0
4.1	1	4.1
	$\sum f = 12$	$\sum fx = 47.1$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} \qquad \bar{x} = \frac{47.1}{12}$$

$$\bar{x} = 3.925$$

சகல வகுப்பாயிடைகளின் வகுப்புப் பருமன் சமமாகக் காணப்படும் பொழுது பின்வரும் முறைகளில் இடை கணிப்பிடப்படும்

உதாரணம்:

தொழிற்சாலையொன்றின் அன்றாடக் கூலி பெறும் பணியாளர்கள் 100 பேரின் அன்றாடக் கூலிகள் தொடர்பான மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இடையினைக் கணிக்குக.

சம்பளம் (ரூபா)	**பணியாளர் எண்ணிக்கை (f)**	**நடுப் பெறுமானம் (x)**	**விலகல் (d)**	**fx**	**Fd**
501 - 550	4	525.5	-100	2 102.0	-400
551 - 600	15	575.5	-50	8 632.5	-750
601 - 650	**35**	<u>**625.5**</u>	**0**	21 892.5	0
651 - 700	29	675.5	50	19 589.5	1450
701 - 750	10	725.5	100	7 255.0	1000
751 - 800	5	775.5	150	3 877.5	750
801 - 850	2	825.5	200	1651	400
				65 000	2450

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{65000}{100}$$
$$= 650$$

உத்தேச இடை கொண்டு இடையைக் கணித்தல்

எண் பரம்பல்களின் தரவுகளின் நடுப் பெறுமானம் பெரிய எண்ணாகக் காணப்படுகின்ற சந்தர்ப்பத்தில் இடையைக் காண்பதற்கு உத்தேச இடை கொண்டு இடையைக் கணித்தல் முறை பின்பற்றப்படுகின்றது.

உத்தேச இடையாக ஆகார வகுப்பின் அல்லது இடைய வகுப்பின் நடுப் பெறுமானத்தினை எடுப்பதன் மூலம் விலகலைக் கணிப்பிடல் இலகுவாக அமையும்.

இங்கு ஆகார வகுப்பு : 601 – 650

விலகல் = நடுப்பெறுமானம் - உத்தேச இடை

இடை = உத்தேச இடை + விலகல் இடை

விலகல் இடை $= \frac{\sum f_1 d_1}{\sum f_1}$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_1 d_1}{\sum f_1}$$

$$= 625.5 + \frac{2450}{100}$$

$$= 625.5 + 24.5$$

$$= 650$$

Note :

இடை, இடையம், ஆகாரம் சமச்சீராக பரம்பியுள்ள போது $\bar{x}$= Md = Mo ஆகவும் சமச்சீரற்று பரம்பியிருக்கும் போது $\bar{x}$ - Mo = 3 ($\bar{x}$ - Md) ஆகவும் காணப்படும்.

சுருக்கம்

இடை, இடையம், ஆகாரம் ஆகிய மூன்றும் மைய நாட்ட அளவைகள் எனப்படும்.

பரம்பலில் அதிக தடைவகள் தோன்றும் ஈட்டு ஆகாரம் எனப்படும். ஈட்டுக்கள் பருமனின் வரிசைப்படி ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட போது நடுப்பெறுமானம் இடையம் ஆகும்.
இடை ஒரு பரம்பலின் சரசரியினைக் குறிக்கின்றது.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. ஒரு தரவுத் தொகுதியின் பரம்பலின் வடிவத்தினை இனங்காண்பதற்கு மைய நாட்ட அளவீடுகளின் முக்கியத்துவத்தினை விளக்குக.
2. 40 நிறுவனங்களில் ஒரு வார உற்பத்தி கிட்டிய மெற்றிக் தொன்களில் கீழுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது. இவ்வட்டவணையினைக் கொண்டு பின்வரும் வினாக்களுக்க விடை தருக.

உற்பத்தி(MT)	4-8	9-13	14-18	19-23	24-28	29-33
மீடிறன் (f)	2	4	7	12	8	5

i. இந்நிறுவனங்களின் சராசரி உற்பத்தி என்ன?
ii. இந்நிறுவனங்களின் இடைய உற்பத்தி என்ன?
iii. கூடுதலான நிறுவனங்களின் உற்பத்தி எந்த நிறைகளுக்கிடையில் உள்ளது?
iv. கூடுதலான நிறுவனங்களின் உற்பத்தி அளவு என்ன?

3. ஒரு தொழிற்சாலையில் 60 தொழிலாளர்களின் கூலி பின்வரும் பரம்பலில் தரப்படுகின்றது. இப்பரம்பலின் இடை, இடையம், ஆகாரம் என்பவற்றைக் கணிப்பிடுக.

கூலி (ரூ. 000)	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-59
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	03	10	20	15	05	04	03

திறவுச் சொற்கள்

மையநாட்ட அளவைகள், இடை, இடையம், ஆகாரம்

உசாத்துணை நூற்கள்

Freeman, J., Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., & Shoesmith, E. (2017). *Statistics for Business and Economics*. (4th ed.). Cengage

Gupta, C.S. (2013). *Fundamentals of Statistics*. Himalaya Publishing House

McClave, B., & Sincich. (2001). *Statistics for Business and Statistics*. Prentice Hall.

அத்தியாயம் - 5

இட அளவைகள் (குழுவாக்கப்பட்ட மற்றும் குழுவாக்கப்படாத தரவுகள்)

பொருளடக்கம் **பக்கம்**

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

வரிசைப்படுத்தப்பட்ட தரவுத் தொகுதியின் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் காணப்படும் பெறுமானங்கள் இட அளவைகள் எனப்படும். தரவுக் கூட்டமொன்றின் சிறப்பான இடத்தை மதிப்பீடு செய்வதற்காக பயன்படுத்துகின்ற அளவீடு இட அளவீடு ஆகும். இவ்வாறான சார்பு இடஅமைவு அளவீடுகள் காலணை, தசமணை, சதமணை ஆகும். அன்றாட வாழ்வில் பல்வேறு காரியங்களில் தரவுகளை வகைகுறிக்கும் ஒரு முறையாக தண்டு - இலை வரைபினை அறிமுகம் செய்யலாம்.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

தரவுகளை தண்டு இலை வரைபு மற்றும் பெட்டிவீசை வரைபடத்தில் குறித்தல் மற்றும் தரவுத் தொகுதியொன்றின் காலணைகள், தசமணைகள், சதமனைகள் கணித்தல் தொடர்பாக விளக்குதல்.

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் தரவுகளை தண்டு இலை வரைபடத்தில் குறித்தல், பெட்டிவீசை வரைபடம் வரைதல், தரவுத்

தொகுதியிலிருந்து காலணைகள், தசமணைகள், சதமனைகள கணிப்பிட முடியுமாக இருப்பர்

காலணை

ஏறுவரிசைப்படுத்தபபட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்றை நான்கு சமபகுதிகளாகப் பிரிக்கும் மூன்று இடங்களின் பெறுமதி காலணை எனப்படும்.

முதலாவது காலணை $Q_1 = \frac{1}{4}(n+1)$ வது அவதானிப்பு

இரண்டாவது காலணை $Q_2 = \frac{1}{2}(n+1)$ வது அவதானிப்பு

மூன்றாவது காலணை $Q_3 = \frac{3}{4}(n+1)$ வது அவதானிப்பு

n என்பது பரம்பலின் மொத்த அவதானிப்பாகும்.

உதாரணம்:

புள்ளிவிபரவியல் பாடத்தைக் கற்கும் 25 மாணவர்கள் பாடசாலை மட்ட கணிப்பீட்டில் பெற்ற புள்ளிகள் தரப்பட்டுள்ளது. முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம் காலணைகளைக் கணிக்குக.

புள்ளி	மாணவர் எண்ணிக்கை	திரள் மீடிறன்
3	2	2
4	3	5
5	3	8
6	7	15
7	4	19
8	3	22
9	2	24
10	1	25

முதலாவது காலணை

$Q_1 = \frac{1}{4}(n+1)$ ஆவது அவதானிப்பு

$Q_1 = \frac{1}{4}(25+1)$ ஆவது அவதானிப்பு

$= \frac{1}{4} \times 26 = 6.5$ ஆவது அவதானிப்பு

$\therefore\ Q_1 = 5$

இரண்டாவது காலணை

$\mathrm{Q}_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{n}+1)$ ஆவது அவதானிப்பு

$\mathrm{Q}_2 = \frac{1}{2}(25+1)$ ஆவது அவதானிப்பு

$= \frac{1}{2} \times 26 = 13$ ஆவது அவதானிப்பு

$\mathrm{Q}_2 = 6$

மூன்றாவது காலணை

$\mathrm{Q}_3 = \frac{3}{4}(\mathrm{n}+1)$ ஆவது அவதானிப்பு

$\mathrm{Q}_3 = \frac{3}{4}(25+1)$ ஆவது அவதானிப்பு

$= \frac{3}{4} \times 26 = 19.5$ ஆவது அவதானிப்பு

$\mathrm{Q}_3 = 7 + 0.5(8-7)$

$= 7 + (0.5 \times 1)$

$= 7.5$

கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்றின் காலணை

$$\mathrm{Q}_1 = \mathrm{L}_1 + \left[\frac{\frac{\mathrm{n}}{4} - \mathrm{cf}}{\mathrm{fQ}_1}\right]\mathrm{C}$$

$$\mathrm{Q}_2 = \mathrm{L}_2 + \left[\frac{\frac{2\mathrm{n}}{4} - \mathrm{cf}}{\mathrm{fQ}_2}\right]\mathrm{C}$$

$$Q_3 = L_3 + \left[\frac{\frac{3n}{4} - cf}{fQ_3}\right] C$$

L_i : குறிப்பிட்ட காலணைக்குரிய வகுப்பாயிடையின் கீழ்எல்லை $i = 1,2,3$

n : பரம்பலின் மொத்த அவதானிப்புக்களின் எண்ணிக்கை.

cf : வகுப்பாயிடையின் கீழ்எல்லையை விடக் குறைந்த திரள் மீடிறன்.

fq : வகுப்பாயிடையின் மீடிறன்

C : வகுப்பாயிடையின் பருமன்.

உதாரணம்:

தெரிவு செய்யப்பட்ட 50 நாட்களுள் வங்கியொன்றிற்கு சமூகமளித்த வாடிக்கையாளர் தொடர்பிலான அறிக்கை தரப்பட்டுள்ளது.

வகுப்பாயிடை	**நாட்களின் எண்ணிக்கை - மீடிறன்**	**திரள் மீடிறன்**
26 - 50	4	4
51 - 75	5	9
76 - 100	7	16
101 - 125	11	27
126 - 150	9	36
151 - 175	8	44
176 - 200	6	50

Q_1 இற்குரிய வகுப்பினை உள்ளடக்கிய வகுப்பு :

$\frac{1}{4} \times n$ ஆவது அவதானிப்பினது வகுப்பு :$\left[\frac{1}{4} \times 50\right] = 12.5$

76 – 100 வகுப்பாகும்.

$$Q_1 = L_1 + \left[\frac{\frac{n}{4} - cf}{fQ_1}\right] C$$

$$Q_1 = 75.5 + \left[\frac{\frac{50}{4} - 9}{7}\right] 25$$

$$= 75.5 + \left[\frac{12.5 - 9}{7}\right] 25$$

$= 75.5 + \frac{3.5}{7} \times 25$

$= 75.5 + 12.5$

$= 88.0$

Q_2 இற்குரிய வகுப்பினை உள்ளடக்கிய வகுப்பு :

$\frac{1}{2} \times n$ ஆவது அவதானிப்பு உள்ளடக்கப்படும் வகுப்பு :$\left[\frac{1}{2} \times 50\right] = 25$

101 – 125 வகுப்பாகும்.

$Q_2 = L_1 + \left[\frac{\frac{2}{4}n - cf}{fQ_2}\right]C$

$Q_2 = 100.5 + \left[\frac{\frac{2}{4} \times 50 - 16}{11}\right]25$

$= 100.5 + \frac{9 \times 25}{11}$

$= 100.5 + 20.45 \qquad = 120.95$

Q_3 இற்குரிய வகுப்பினை உள்ளடக்கிய வகுப்பு :

$\frac{3}{4} \times n$ ஆவது அவதானிப்பு உள்ளடக்கப்படும் வகுப்பு :$\left[\frac{3}{4} \times 50\right] = 37.5$

151 – 175 வகுப்பாகும்.

$Q_3 = L_1 + \left[\frac{\frac{3}{4}n - cf}{fQ_3}\right]C$

$Q_3 = 150.5 + \left[\frac{37.5 - 36}{8}\right]25$

$= 155.19$

தசமணை

ஏறுவரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஏதாவது மீடிறன் பரம்பலொன்றை 10 சமபகுதிகளாகப் பிரிக்கும் 9 இடங்கள் தசமணை எனப்படும். கூட்டமாக்கப்படாத மீடிறன் பரம்பலொன்றின் தசமணையினை பின்வருமாறு கணிக்கலாம்.

முதலாவது தசமணை : $D_1 = \frac{1}{10}(n + 1)$ வது அவதானிப்பு

இரண்டாவது தசமணை: $D_2 = \frac{2}{10}(n+1)$ வது அவதானிப்பு

ஒன்பதாவது தசமணை: $D_9 = \frac{9}{10}(n+1)$ வது அவதானிப்பு

அவதானிப்பு n ஐக்கொண்ட தரவுக் கூட்டமொன்றினதும் கூட்டமாக்கப்படாத மீடிறன் பரமப்லொன்றினதும் தசமணையினை பின்வருமாறு பெற்றுக் கொள்ள முடியும்.

முதலாவது தசமணை $D_1 = \frac{1}{10} \times n$ வது அவதானிப்பு

இரண்டாவது தசமணை $D_2 = \frac{2}{10} \times n$ வது அவதானிப்பு

ஒன்பதாவது தசமணை $D_9 = \frac{9}{10} \times n$ வது அவதானிப்பு

உதாரணம்:

சில்லறை வியாபாரியொருவர் 15 நாட்களில் விற்பனை செய்த தேங்காய்களின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது. மூன்றாவது தசமணை D_3, ஐந்தாவது தசமணை D_5, ஏழாவது தசமணை D_7 என்பவற்றைக் கணிக்க.

19, 20, 20, 25, 26, 28, 30, 30, 34, 38, 40, 42, 43, 44, 50

$D_3 = \frac{3}{10} \times (n+1)$ ஆவது அவதானிப்பு

$D_3 = \frac{3}{10} \times 16 = 4.8$ ஆவது அவதானிப்பு

$= 25 + (26 - 25) \times 0.8$

$= 25.8$

$D_5 = \frac{5}{10} \times (n+1)$ ஆவது அவதானிப்பு

$= \frac{5}{10} \times 16 = 8$ ஆவது அவதானிப்பு

$D_5 = 30$

$D_7 = \frac{7}{10} \times (n+1)$ ஆவது அவதானிப்பு

$D_7 = \frac{7}{10} \times 16 = 11.2$ ஆவது அவதானிப்பு

$= 40 + (42 - 40) \times 0.2 = 40.4$

கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்றின் தசமணைகளைக் கணித்தல்

கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்றின் தசமணைகளைப் பெற்றுக் கொள்வதற்கு பின்வரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த முடியும்.

முதலாவது தசமணை $D_1 = L_1 + \left[\frac{\frac{n}{10} - cf}{fD_1}\right] C$

இரண்டாவது தசமணை $D_2 = L_2 + \left[\frac{\frac{2n}{10} - cf}{fD_2}\right] C$

ஒன்பதாவது தசமணை $D_9 = L_9 + \left[\frac{\frac{9n}{10} - cf}{fD_9}\right] C$

L_1 : குறிப்பிட்ட தசமணையினைக்குரிய வகுப்பாயிடையின்கீழ்எல்லை $i = 1, 2, 3 \ldots\ldots 9$

n : மொத்த அவதானிப்புக்களின் எண்ணிக்கை.

cf : வகுப்பாயிடையின் கீழ்எல்லையை விடக் குறைந்த திரள் மீடிறன்.

fD : வகுப்பாயிடைக்குரிய மீடிறன்

C : வகுப்பாயிடையின் பருமன்.

உதாரணம் :

தெரிவு செய்யப்பட்ட 50 நாட்களுள் வங்கியொன்றிற்கு சமூகமளித்த வாடிக்கையாளர் தொடர்பிலான அறிக்கை தரப்பட்டுள்ளது. D_1, D_5, D_8 என்பவற்றைக் கணிக்குக.

வகுப்பாயிடை	நாட்களின் எண்ணிக்கை - மீடிறன்	திரள் மீடிறன்
26 - 50	4	4
51 - 75	5	9
76 – 100	7	16
101 – 125	11	27
126 – 150	9	36
151 – 175	8	44
176 - 200	6	50

$$D_1 = L_1 + \left[\frac{\frac{n}{10} - cf}{fD_1}\right] C$$

D_1 ஐ உள்ளடக்கிய வகுப்பு $\frac{1}{10} \times 50 = 5$ (51 – 75)

$$D_1 = 50.5 + \left[\frac{\frac{50}{10} - 4}{5}\right] 25$$

$$= 55.5$$

$$D_5 = L_5 + \left[\frac{\frac{5n}{10} - cf}{fD_5}\right] C$$

D_5 ஐ உள்ளடக்கிய வகுப்பு $\frac{5}{10} \times 50 = 25$ (101 – 125)

$$D_5 = 100.5 + \left[\frac{\frac{5 \times 50}{10} - 6}{11}\right] 25 \qquad = 120.95$$

$$D_8 = L_8 + \left[\frac{\frac{8n}{10} - cf}{fD_8}\right] C$$

D_8 ஐ உள்ளடக்கிய வகுப்பு $\frac{8}{10} \times 50 = 40$ (151 – 175)

$$D_8 = 150.5 + \left[\frac{\frac{8 \times 50}{10} - 36}{8}\right] 25$$

$$= 163$$

சதமணை

ஏறுவரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஏதாவது மீடிறன் பரம்பலொன்றை 100 சமபகுதிகளாக பிரிக்கின்ற 99 இடங்கள் சதமணை எனப்படும். கூட்டமாக்கப்படாத மீடிறன் பரம்பலொன்றின் சதமணையினை பின்வருமாறு கணிப்பிடலாம்.

i ஆவது சதமணை $D_i = \frac{n+1}{100} \times i$ எனும் அவதானிப்பு

உதாரணம்:

50 மாணவர்களின் கணிப்பீட்டுப் புள்ளிகள் பின்வரும் கூட்டமாக்கப்படாத மீடிறன் பரம்பலில் முன்வைக்கப்பட்டுள்ளது. 10 வது சதமணை (P_{10}), 50 வது சதமணை (P_{50}), 90 வது சதமணை (P_{90}) என்பவற்றைக் கணிக்க.

புள்ளிகள் (x)	**மாணவர் எண்ணிக்கை**	**திரள் மீடிறன்**
3	4	4
4	5	9
5	8	17
6	12	29
7	10	39
8	6	4
9	3	48
10	2	50

$P_{10} = \frac{n+1}{100} \times 10 = \frac{50+1}{100} \times 10 = 5.1$ வது அவதானிப்பு = 4

$P_{50} = \frac{n+1}{100} \times 50 = \frac{50+1}{100} \times 50 = 25.5$ வது அவதானிப்பு = 6

$P_{90} = \frac{n+1}{100} \times 90 = \frac{50+1}{100} \times 90 = 45.9$ வது அவதானிப்பு = 8

கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்றின் சதமணையினைக் கணித்தல்

முதலாவது சதமணை : $P_1 = L_1 + \left[\frac{\frac{1n}{100} - cf}{fP_1}\right] C$

L_1 : குறிப்பிட்ட சதமணையினைக்குரிய வகுப்பாயிடையின் கீழ்எல்லை

n : பரம்பலின் மொத்த அவதானிப்புக்களின் எண்ணிக்கை

cf : வகுப்பாயிடையின் கீழ்எல்லையை விடக் குறைந்த திரள் மீடிறன்.

fP : வகுப்பாயிடையின் மீடிறன்

C : வகுப்பாயிடையின் பருமன்

உதாரணம் :

தெரிவு செய்யப்பட்ட 50 நாட்களுள் வங்கியொன்றிற்கு சமூகமளித்த வாடிக்கையாளர் தொடர்பிலான அறிக்கை தரப்பட்டுள்ளது. P_{25}, P_{50}, P_{75} என்பவற்றைக் கணிக்குக.

வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை	**நாட்களின் எண்ணிக்கை**	**திரள் மீடிறன்**
26 - 50	4	4
51 - 75	5	9
76 - 100	7	16
101 - 125	11	27
126 - 150	9	36
151 - 175	8	44
176 - 200	6	50

$$P_{25} = L_{25} + \left[\frac{\frac{25n}{100} - cf}{fP_{25}}\right] C$$

P_{25} ஐ உள்ளடக்கிய வகுப்பாக அமைவது $\frac{25\times 50}{100} = 12.5$ (76 – 100)

$$= 75.5 + \left[\frac{\frac{25\times 50}{100} - 9}{7}\right] 25 = 88$$

$$P_{50} = L_{50} + \left[\frac{\frac{50n}{100} - cf}{fP_{50}}\right] C$$

P_{50} ஐ உள்ளடக்கிய வகுப்பாக அமைவது $\frac{50\times 50}{100} = 25$ (101 – 125)

$$= 100.5 + \left[\frac{\frac{50\times 50}{100} - 16}{11}\right] 25 = 120.95$$

$$P_{75} = L_{75} + \left[\frac{\frac{75n}{100} - cf}{fP_{75}}\right] C$$

P_{75} ஐ உள்ளடக்கிய வகுப்பு $\frac{75 \times 50}{10} = 37.5$ (151 – 175)

$$= 150.5 + \left[\frac{\frac{75 \times 50}{100} - 36}{8}\right] 25$$

$$= 150.5 + \left[\frac{37.5 - 36}{8}\right] 25 \quad = 155.19$$

Note :

கணிக்கப்பட்ட முதலாவது காலணை, இரண்டாவது காலணை, மூன்றாவது காலணை என்பவற்றை மேலே கணிக்கப்பட்ட தசமணைப் பெறுமதிகளுடன் ஒப்பிடுக.

இதற்கமைய $Q_1 = P_{25}$, $Q_2 = P_{50}$, $Q_3 = P_{75}$ எனும் முடிவுக்கு வரலாம்.

சார்பு இடஅமைவு அளவீடுகளுக்கிடையில் பின்வரும் தொடர்புகள் காணப்படுகின்றன.

- $Q_2 = D_5 = P_{50}$
- $Q_1 = P_{25}$
- $D_2 = P_2$
- $Q_3 = P_{75}$
- $D_1 = P_{10}$

தண்டு இலை வரைபடம் (Stem Leaf Diagram)

தரவுகளை ஒழுங்குபடுத்துவதுடன் தரவின் பரம்பலை விளங்கிக் கொள்ளவும் தண்டு இலை வரைபடம் பயன்படும்.

தரவுகள் 0 இல் இருந்து 99 வரையுள்ள பெறுமானங்களைக் கொண்டிருக்கம் போது, எண்களின் ஒன்றினிடத்து இலக்கம் இலையாகவும் பத்தினிடத்து இலக்கம் தண்டாகவும் இரு பிரிவுகளாக எழுதப்படும். தரவுகள் 100 இலிருந்து 999 வரையுள்ள பெறுமானங்கள் காணப்படும் போது இப்பெறுமானங்களின் ஒன்றினிடத்து இலக்கம் இலை ஆகுமாறும் நூறினிடத்தையும்

பத்தினிடத்தையும் குறிக்கும் இலக்கங்கள் தண்டு ஆகுமாறும் இரண்டு பகுதிகளாக பிரிக்கப்படும்.

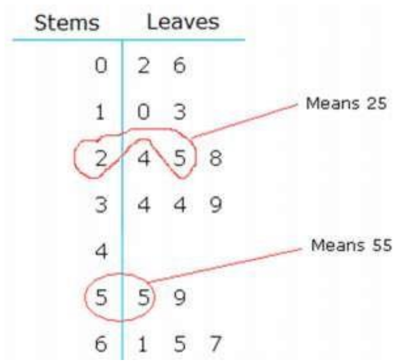
உதாரணம்:

24, 10, 13, 2, 28, 34, 65, 67, 55, 34, 25, 59, 8, 39, 61

தரவுகளை ஏறுவரிசைப் படுத்தின்

2, 6, 10, 13, 24, 25, 28, 34, 34, 39, 55, 59, 61, 65, 67

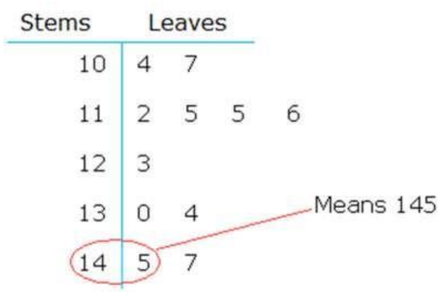
ஆகவே 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்பவற்றை தண்டுகளாக கொண்டு பின்வருமாறு வரையலாம்.



உதாரணம் : 02

104, 107, 112, 115, 115, 116, 123, 130, 134, 145, 147

ஆகவே 10 11, 12, 13, 14 என்பவற்றை தண்டுகளாக கொண்டு வரையலாம்



உதாரணம் 03

பின்னுக்குப் பின் தண்டு இலை வரைபடம்

கணிதப்பாடத்தில் பெற்ற A வகுப்பின் புள்ளிகள் : 60, 68, 70, 75, 84, 86, 90, 91, 92, 94, 94, 96, 100, 100

கணிதப்பாடத்தில் பெற்ற B வகுப்பின் புள்ளிகள் : 60, 60, 70, 71, 73, 73, 75, 76, 77, 84, 85, 86, 91, 92

Class A Leaves	Stems	Class B Leaves
8 0	6	0 0
5 0	7	0 1 3 3 5 6 7
6 4	8	4 5 6
6 4 4 2 1 0	9	1 2
0 0	10	

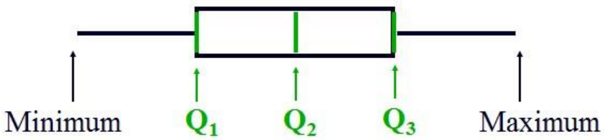
பெட்டி விசை வரைபடம் Box and Whisker Plot

பெட்டி விசை வரைபடம் **Box and Whisker Plot** பரம்பலின் விலகலை விளக்க பெட்டி விசை வரைபடம் பயன்படுத்தப்படும்.

மிகக் குறைந்த பெறுமானம், அதி கூடிய பெறுமானம், முதலாம் காலணை, இரண்டாம் காலணை, மூன்றாம் காலணை என்பன பின்வருமாறு குறிக்கப்படும்.

இவ்வரைபடம் பரம்பலின் விலகலை விளக்குகிறது. இதனை வரைய பின்வரும் அளவீடுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

1. பரம்பலின் மிகக் குறைந்த பெறுமானம்
2. பரம்பலின் அதி கூடிய பெறுமானம்
3. பரம்பலின் முதலாம் காலணை (Q_1)
4. பரம்பலின் இரண்டாம் காலணை (Q_2) / இடையம்
5. பரம்பலின் மூன்றாம் காலணை (Q_3)



உதாரணம்

தண்டு	இலை
1	2 7 8 9
2	2 5 7
3	0 3 6 8 9
4	5 5 7
5	1 3 4 4 4 4 5
6	1 5 5 6 6 9
7	0 2 4 5 6
8	4 9

பரம்பலின் ஆகாரம் 54 ஆகும்.

பரம்பலின் வீச்சு 89 – 12 = 77

இடையம் (Q_2) = ½ (35+1)

= 18 ஆவது ஈட்டு

= 54

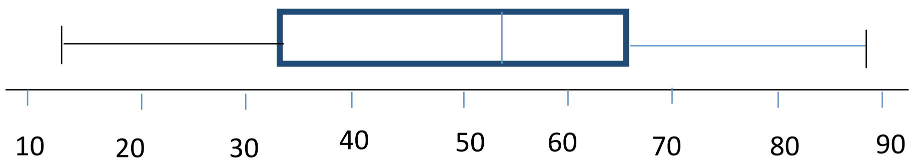
முதலாம் காலணை (Q_1) = ¼ (35+1) ஆவது ஈட்டு

= 9 ஆவது ஈட்டு = 33

மூன்றாம் காலணை (Q_3) = ¾ (35+1) ஆவது ஈட்டு

= 27ஆவது ஈட்டு

= 66



சுருக்கம்

ஏறுவரிசை படுத்தப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்றை நான்கு சமபகுதிகளாகப் பிரிக்கும் மூன்று தரவுகளின் பெறுமதி காலணை எனப்படும்.

ஏறுவரிசைப் படுத்தப்பட்ட தரவுத் தொகுதி 10 சம பகுதிகளாக பிரிக்கப்படும் போது கிடைக்கும் 9 தரவுகள் முறையே 1ம் தசமணை, 2ம் தசமணை, 9ம் தசமணை எனப்படும்.

ஏறுவரிசைப்படுத்தப்பட்ட தரவுத் தொகுதி 100 சம பகுதிகளாக பிரிக்கப்படும் போது கிடைக்கும் 99 தரவுகள் முறையே 1ம் சதமணை, 2ம் சதமணை , 99ம் சதமணை எனப்படும்.

தரவுகளை ஒழுங்குபடுத்துவதுடன் தரவின் பரம்பலை விளங்கிக் கொள்ளவும் தண்டு இலை வரைபடம் பயன்படும்.

பரம்பலின் விலகலை விளக்க பெட்டி விசை வரைபடம் பயன்படுத்தப்படும்.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. பின்வரும் பதங்களை வரையறை செய்க.
   a. காலணை
   b. தசமனை
   c. சதமனை
2. தொழிற்சாலையொன்றின் அன்றாடக் கூலி பெறும் பணியாளர்கள் 100 பேரின் அன்றாடக் கூலிகள் தொடர்பான

மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம் காலணைகள், முதலாம், இரண்டாம், ஐந்தாம் தசமணைகள், பத்தாம், இருபதாம், இருபத்தைந்தாம், ஐம்பதாம், எழுபத்தைந்தாம் சதமணைகளைக் கணிப்பிட்டு அவற்றிற்கிடையிலான தொடர்பினை ஆராய்க.

கூலி	ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை	திரள் மீடிறன்
501 - 550	4	4
551 - 600	13	19
601 - 650	35	54
651 - 700	29	83
701 - 750	10	93
751 - 800	07	100

3. 30 மனிதர்களின் நிறைகள் கிட்டிய kg இல் தரப்பட்டுள்ளது.

59	56	40	43	46	38	29	52
34	23	41	42	52	50	58	60
45	56	59	49	44	36	38	36
42	47	50	54	59	47		

மேலுள்ள தரவுகளை தண்டு - இலை வரைபில் குறித்துக் காட்டுக. பரம்பலின் இடையம், காலணைகள் என்பவற்றைக் காண்க. தரவுகளை வகைக்குறிக்க பெட்டி வரைபு ஒன்று வரைக. (20 – 29, 30 – 39 , 40 – 49 என வகுப்பாயிடையின எடுக்க)

திறவுச் சொற்கள்

தசமணை, சதமணை, காலணை, தண்டு - இலை வரைபு, பெட்டி வரைபு

உசாத்துணை நூற்கள்

Gupta, C.S. (2013). *Fundamentals of Statistics*. Himalaya Publishing House

அத்தியாயம் - 06

விலகள் அளவைகள் (குழுவாக்கப்பட்ட மற்றும் குழுவாக்கப்படாத தரவுகள்)

பொருளடக்கம் பக்கம்

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

சமச்சீராக உள்ள மீடிறன் பரம்பல் ஒன்றில் இடை, இடையம், ஆகாரம் ஆகியவைகள் சமனாகக் காணப்படும். ஆகையால் இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட ஒரே மாதிரிகளினதும், ஒரே சமச்சீராக உள்ளதுமான பரம்பல்களில் மைய நட்டை அளவீடுகளைக் கொண்டு அவற்றை ஒப்பிட முடியாது. ஏனெனில் பரம்பல்களின் சராசரிகள் ஒரே பெறுமானமாக இருந்த போதிலும் மீடிறன் பரம்பல்களில் சராசரிகளாகச் சுற்றிலும் பரம்பி அல்லது சிதறி வேறுபட்டு இருக்கக் கூடும். இரண்டு மீடிறன் பரம்பல்களின் இடை, இடையம், ஆகாரம் என்பன சமமாகவும் பரம்பல்களின் மீடிறன் வளையி மைய நாட்ட பரம்பலுக்கு ஒரே சீராக இருந்த போதிலும் அவைகள் பரவலின் அல்லது சிதறலில் மாறுபட்டு இருக்கலாம். ஆதலால் சராசரியை அளவிடும் இடை, இடையம், ஆகாரம், பரம்பலின் மைய நாட்டத்தை தெரிவிப்பவையே தவிர பரம்பலினுடைய விலகளின் தன்மையை அறிய உதவுவதில்லை. ஒரு மீடிறன் பரம்பலின் அலகுகள் மைய நாட்ட அளவுகளைச் சுற்றிலும் எவ்வாறு விலகி அவைகளிலிருந்து மாறுபட்ட அளவுகளை பெற்றிறுக்கின்றன என்பதை அறிய சில விலகல் முறைகளை

வரையறுத்து விலகலின் தன்மையை வரையறுத்து விளங்கிக் கொள்வது இன்றியமையாததாகுகம்.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

விலகள் அளவைகள் தொடர்பாக விளக்குதல்

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் விலகள் அளவைகளைக் கணிப்பிட முடியுமாக இருப்பர்.

விலகல் அளவைகள்

தரவுத் தொகுதியொன்று சிதறி அல்லது விலகி இருப்பதை விலகல் என அழைக்கப்படும். எண்ணிக்கைத் தொகுதியொன்றை அவ்வெண்ணிக்கைத் தொகுதியின் சராசரிப் பெறுமானத்தில் காட்டப்படும் அளவையே விலகலின் மூலம் வெளிப்படுத்தப்படுகின்றது.

விலகல் அளவையின் அனுகூலங்கள்

- தரவு பரம்பி இருக்கும் முறையை இனங்காண முடிதல்.
- மைய அளவீடுகளின் நம்பகத் தன்மையை உறுதிப்படுத்திக் கொள்ள முடியும்.
- இரு தரவுத் தொகுதிகள் அல்லது அதிலும் கூடிய அளவில் காணப்படும் பொழுது அவற்றின் பரம்பலை ஒப்பிடுவதற்காக பயன்படுத்த முடியுமாக இருக்கும்.

விலகலினை அளவிடுவதற்காக வீச்சு, காலணை விலகல், இடைவிலகல், மாறற்றிறன், நியம விலகல் ஆகிய சரியான பிரிகை அளவீடுகளைப் பயன்படுத்த முடியும்.

வீச்சு (Range)

எவையேனும் பரம்பலொன்றின் அல்லது தரவுத் தொகுதியொன்றில் உள்ளடக்கப்பட்ட பாரிய இடை வெளியே வீச்சு எனப்படும்.

வீச்சு = கூடிய பெறுமானம் - குறைந்த பெறுமானம்

உதாரணம் :

ஒரு வகுப்பில் 10 மாணவர்கள் கணிதப் பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகள் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.

65, 70, 62, 90, 92, 50, 48, 32, 60, 71

R (வீச்சு) = உச்ச பெறுமானம் − இழிவுப் பெறுமானம்

$= 92 - 32 \quad = 60$

காலணை விலகல் (Inter Quality Deviation)

தரவுகளை சமமான நான்கு பகுதிகளாக வகைப்படுத்தி, 3ம் காலணையிலிருந்து (Q_3), 1ம் காலணையின் பெறுமானத்தைக் கழித்து (Q_1) கிடைக்கும் பெறுமானத்தையே காலணை விலகல் என்றழைக்கப்படும்.

காலணை விலகல் பரம்பலொன்றின் 50% த்தைக் கொண்ட தரவுகளை உள்ளடக்கப்பட்டிருக்கும்.

$Q_1 = \frac{1}{4}$ (n+1) எனும் அவதானிப்பு

$= \frac{1}{4} \times 11 = \frac{11}{4}$ எனும் அவதானிப்பு

= 2.75 எனும் அவதானிப்பு

$$Q_1 = 48 + (50 - 48)\ 0.75$$
$$= 48 + 1.5$$
$$= 49.5$$

$Q_3 = \frac{3}{4}$ (n+1) எனும் அவதானிப்பு

$= \frac{3}{4} \times 11 = \frac{33}{4}$ எனும் அவதானிப்பு

= 8.25 எனும் அவதானிப்பு

$$Q_3 = 71 + (90 - 71)\ 0.25$$
$$= 71 + 4.75$$
$$= 75.75$$

காலணை விலகல் $= Q_3 - Q_1$

$$= 75.75 - 49.5$$

$$= 26.25$$

அரைக் காலணை விலகல் (Quality Deviation)

காலணை விலகலின் அரைப் பகுதி அரைக் காலணை விலகல் எனப்படும்.

$$\text{Q.D} = \frac{(Q_3 - Q_1)}{2}$$

அரைக் காலணை விலகல் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{75.75 - 49.5}{2}$$

$$= 13.125$$

இடை விலகல் (Mean Deviation)

தரவுத் தொகுதியொன்றின் இடையிலிருந்து ஒவ்வொரு தரவுகளுக்குமிருக்கும் தனி விலகல்களின் சராசரியே இடை விலகலாகும்.

கூட்டமாக்கப்படாத தரவுகளுக்கான இடைவிலகலைக் கணிப்பிடல்

இடை விலகல் $\text{Mean Deviation} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(|x_i - \bar{x}|)}{n}$

ஒவ்வொரு அவதானிப்புகளிலிருந்தும் இடையினைக் கழித்துக் கிடைக்கப் பெறும் உண்மை விலகல்களின் கூட்டுத்தொகை எவ்வேளையிலும் பூச்சியத்திற்குச் சமமானதாகக் காணப்படும், எனவே;

$|x_i - \bar{x}|$: இடைவிலகலின் நேர்ப்பெறுமானத்தைக் குறித்து நிற்கின்றது. இது இடைவிலகலை கணிப்பிட பயன்படுத்தப்படுகிறது.

உதாரணம்:

ஒரு வகுப்பில் 10 மாணவர்கள் கணிதப் பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகள் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது. இடை விலகலைக் கணிப்பிடுக.

x	$(x_i - \bar{x})$
65	1
70	6
62	2
90	26
92	28
50	14
48	16
32	32
60	04
71	6
$\sum x = 640$	$\sum(\lvert x_i - \bar{x}\rvert) = 136$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{640}{10} = 64$$

$$\text{Mean Deviation} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\lvert x_i - \bar{x}\rvert)}{n}$$

$$= \frac{136}{10} = 13.6$$

கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கான இடைவிலகலைக் கணிப்பிடல்

$$\text{இடை விலகல் Mean Deviation} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(\lvert x_i - \bar{x}\rvert)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

உதாரணம்:

வணிக நிறுவனமொன்றின் 100 பணியாளர்களின் மாதாந்தச் சம்பளம் ரூபா (000) த்தில் பின்வரும் பரம்பலில் சுட்டிக் காட்டப்பட்டுள்ளது. இடைவிலகலைக் கணிக்குக.

சம்பளம்	**ஊழியர் தொகை (*f*)**	**நடுப் பெறுமானம் (x)**	$\lvert(x_i - \bar{x})\rvert$	$f\lvert(x_i - \bar{x})\rvert$
05 - 09	11	7	11	121
10 - 14	20	12	6	120
15 - 19	35	17	1	35
20 - 24	20	22	4	80
25 - 29	08	27	9	72
30 - 34	06	32	14	84
	$\sum f = 100$			512

$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$

$= \frac{1760}{100}$

$= 17.6$

$MD = \frac{\sum f|(x_i - \bar{x})|}{\sum f}$

$= \frac{512}{100}$

$= 5.12$

மாறற்றிறன், நியம விலகல், மாறற் குணகம் (Variance and Standard deviation, co – efficient of variance)

- தரவுத் தொகுதியொன்றின் இடையிலிருந்து தான் விலகலை வர்க்கிக்கப்பட்டு, அவ்வர்க்கங்களின் சராசரியினைக் கணிப்பிடுவதன் மூலம் மாறற்றிறனைக் கணிப்பிட முடியும். மாதிரியொன்றின் மாறற்றிறனை (S^2) எனவும், குடியொன்றின் மாறற்றிறன் σ^2 எனவும் குறிப்பிடப்படுகின்றது.
- மாறற்றிறனின் நேர்வர்க்க மூலத்தைப் பெற்றுக் கொள்வதன் மூலம் நியம விலகலைக் கணிப்பிடப்படும். மாதிரியொன்றின் நியம விலகலை S, குடியொன்றின் நியம விலகலை σ எனவும் குறிப்பிடப்படுகின்றது.

  நியம விலகல் மற்றும் இடைக்கிடையிலான வீதமொன்றாக காட்டுவதன் மூலம் அவ்வாறான பரம்பலொன்றின் மாறல்களை ஒப்பிடுவதற்குப் பொருத்தமான சார்புப் பிரிகை அளவீடொன்றைப் பெற்றுக் கொள்ள முடியும். இவ்வளவீட்டினை மாறற்குணகம் என்றழைக்கப்படுவதுடன் $C.V = \frac{S}{\bar{x}} \times 100\%$ எனும் சூத்திரத்தின் மூலம் கணிப்பிட முடியும்.

  S : நியம விலகல்

  $\bar{X}$: இடை

கூட்டமாக்கப்படாத தரவுத் தொகுதியின் மாறற்றிறன், நியம விலகல்

மாறற்றிறன்

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \qquad \text{அல்லது} \qquad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x^2}{n} - \bar{x}^2$$

நியம விலகல்

$$S = \sqrt{\frac{\sum(\boldsymbol{x_i}-\overline{\boldsymbol{x}})^2}{n}} \quad \text{அல்லது} \quad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

உதாரணம்:

ஒரு வகுப்பில் 10 மாணவர்கள் கணிதப் பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகள் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது. மாறற்றிறன், நியம விலகல், மாறற்குணகம் என்பவற்றைக் கணிக்குக.

x	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
65	1	1
70	6	36
62	2	4
90	26	676
92	28	784
50	14	196
48	16	256
32	32	1 024
60	04	16
71	6	49
$\sum x = 640$	$\sum(\lvert x - \bar{x}\rvert)$ =136	$\sum(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^2 = 3042$

மாறற்றிறன் $(S^2) = \frac{\sum(\boldsymbol{x_i}-\overline{\boldsymbol{x}})^2}{n} = \frac{3042}{10}$

$= 304.2$

நியம விலகல் $(S) = \sqrt{304.2}$

$= 17.4$

மாறற்குணகம் $CV = \frac{S}{\bar{X}} \times 100\%$

$= \frac{17.4}{64} \times 100\%$

$= 27.18\%$

கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கான மாறற்றிறன், நியமவிலகலைக் கணித்தல்

மாறற்றிறன்

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x_i} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \quad \text{அல்லது} \quad S^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2$$

நியம விலகல்

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x_i} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} \quad \text{அல்லது} \quad S = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2}$$

உதாரணம்:

வணிக நிறுவனமொன்றின் 100 பணியாளர்களின் மாதாந்தச் சம்பளம் பின்வரும் பரம்பலில் சுட்டிக் காட்டப்பட்டுள்ளது. மாறற்றிறன், நியம விலகல், மாறற்குணகம் என்பவற்றைக் கணிக்குக.

சம்பளம் (ரூபா 000)	ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை	***X***	***fx***	***fx²***
05 - 09	11	7	77	539
10 - 14	20	12	240	2 880
15 - 19	35	17	595	10 115
20 - 24	20	22	440	9 680
25 - 29	08	27	216	5 832
30 - 34	06	32	192	6 144
	100		1760	35 190

$$S^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2$$

$$S^2 = \frac{35190}{100} - \left(\frac{1760}{100}\right)^2$$

$$= 351.9 - 309.76 = 42.14$$

நியமவிலகல் (S) $= \sqrt{42.14}$

$= 6.49$

மாறற்குணகம் : $C.V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100\%$

$$= \frac{6.49}{17.6} \times 100\%$$

$$= 36.87\%$$

சுருக்கம்

விலகள் அளவைகளுள் வீச்சு, மாறற்றிறன், நியம விலகல், மாறற்குணகம், காலணை விலகள், காலணை இடைவீச்சு என்பன உள்ளடங்கும். ஏதேனும் ஒரு மாறிக்கும், அம்மாறியின் சராசரிப் பெறுமானத்திற்கும் இடையிலான வேறுபாடு இடைவிலகல் எனப்படும்.

பரம்பல் ஒன்றில் ஏதாவது ஒரு மாறிக்கும் அம்மாறியின் சராசரிப் பெறுமானத்திற்கும் உள்ள வித்தியாசங்களின் வர்க்கங்களின் இடையானது மாறற்றிறன் எனப்படும். மாறற்றிறனின் வர்க்கமூலப் பெறுமானம் அம் மாறியின் நியம விலகல் எனப்படும்.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. ஒரு தரவுத் தொகுதியின் பரம்பலின் வடிவத்தினை இனங்காண்பதற்கு மாறல் அளவைகளின் முக்கியத்துவத்தினை விளக்குக.

2. 10 நபர்களின் வருமானம் ரூபாவில் தரப்பட்டுள்ளது. இவ் வருமானங்களின் இடை விலகல், மாறற்றிறன், நியம விலகல் மற்றும் மாறற் குணகத்தினைக் காண்க.

   114 , 115 , 123, 120, 110, 130, 119,118,116,115

2. குறிப்பிட்ட நகரமொன்றில் மக்கள் திருமணம் முடித்த வயதுகளை காட்டும் தரவுகள் கீழே கொடுக்கப்படுகின்றது. இத் தரவுகளின் இடை விலகலைக் காண்க. மாறற்றிறன், நியம விலகல் மற்றும் மாறற் குணகத்தினைக் காண்க.

திருமணம் முடித்த வயது	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74
மக்களின் எண்ணிக்கை	33	264	303	214	128	58

திறவுச் சொற்கள்

வீச்சு, மாறற்றிறன், நியம விலகள், மாறற்குணகம், காலணை விலகள், காலணை இடைவீச்சு

உசாத்துணை நூற்கள்

Freeman, J., Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., & Shoesmith, E. (2017). *Statistics for Business and Economics*. (4th ed.). Cengage

Gupta, C.S. (2013). *Fundamentals of Statistics*. Himalaya Publishing House

McClave, B., & Sincich. (2001). *Statistics for Business and Statistics*. Prentice Hall.

அத்தியாயம் - 7

ஓராய மற்றும் குடில அளவைகள்

பொருளடக்கம் **பக்கம்**

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

ஒரே சீராக அமையாத மீடிறன் பரம்பலின் போக்கு ஓராயம் எனப்படும். பரம்பலின் மீடிறன் வளையிக்கு உச்சிக்கூடாக நிலைக்குத்தாக வரையப்படும் கோட்டிற்கு இரு புறமும் ஒரே மாதிரியான அமைப்பு காணப்படும். குடில அளவானது ஒரு பரம்பலிற்கு ஒத்த மீடிறன் வளையில் சிகரங்களின் உச்சியை குறிக்கின்றது.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

ஓராய அளவைகள் மற்றும் குடில அளவைகள் தொடர்பாக விளக்குதல்

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் ஓராயக் குணகங்கள் மற்றும் குடிலக் குணகங்களைக் கணிப்பிட முடியுமாக இருப்பர்

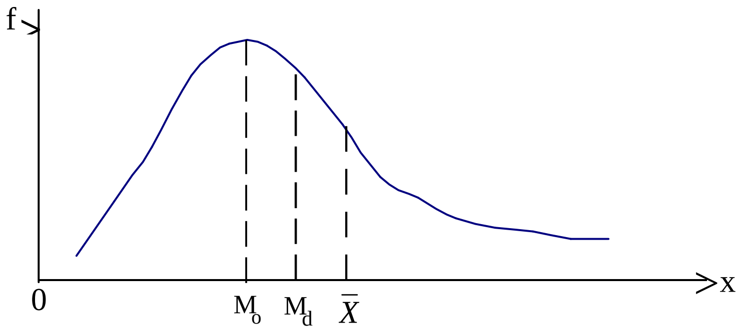
ஓராய அளவை

சீராக அமையும் பரம்பலின் இடை, இடையம், ஆகாரம் ஆகிய மூன்றும் ஒன்றாகப் பொருந்தும். ஆனால் சீரற்ற தன்மையில் ஆகாரத்திலிருந்து இடை, இடையம் என்பன விலகுகின்றன. சேகரிக்கப்பட்ட தரவின் நிகழ்தகவுப் பரம்பலானது சமச்சீர் ஆனதா அல்லது சமச்சீர் அற்றதா என்பதைப் பற்றி ஆராயும் அளவீடு ஓராய அளவீடாகம்.

ஓராய வகைகள்

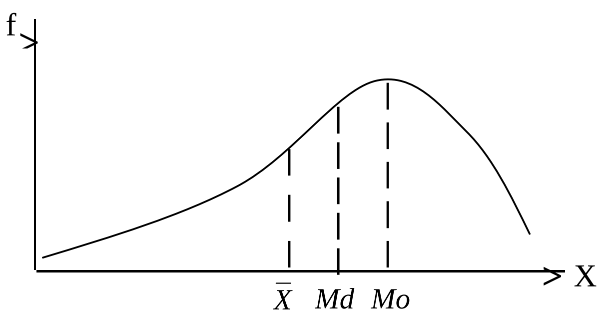
நேர் ஓாரயம் :

பரம்பலொன்றின் மீடிறன் வளைகோடானது மைய உச்சத்திலிருந்து இடது பக்கத்தை விட வலது பக்கமாக நீண்டு செல்கின்ற வாலொன்றுடன் கூடியதாக காணப்படுமாயின் அப்பரம்பலானது வலதுபக்க ஓராயம் எனப்படும். அல்லது நேர் ஓராயத்துடன் கூடிய பரம்பலொன்றாகும். இங்கு $M_o < M_d < \bar{X}$ ஆகக் காணப்படும்.

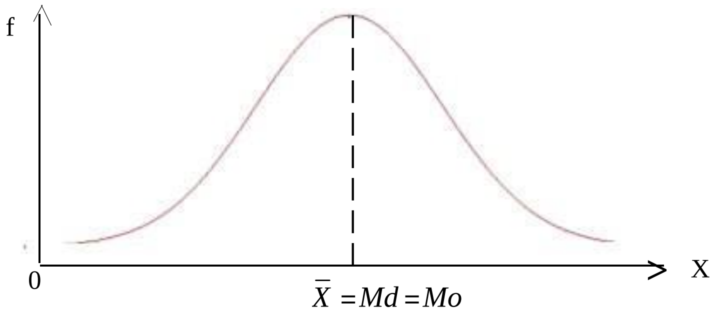


மறை ஓராயம்

பரம்பலொன்றின் மீடிறன் வளைகோடானது மைய உச்சத்திலிருந்து வலப்பக்கத்தை விட இடப்பக்கமாக நீண்டு வாலுடன் கூடியதாக காணப்படின் அவ்வாறான பரம்பல் இடது பக்க ஓராயமாகும். அல்லது மறை ஓராயத்தைக் கொண்ட பரம்பலொன்றாகும். இங்கு $\bar{X} < M_d < Mo$ ஆகக் காணப்படும்.



பூச்சிய ஓராயம் : மீடிறன் பரம்பல் ஒன்றில் இடையும், ஆகாரமும், இடையமும் சமனாக இருப்பின் அதன் ஓராயம் பூச்சிய ஓராயம் எனப்படும்.



ஓராயத்தை அளவிடும் முறைகள்

1. **Kelly யின் ஓராய முறை**

$$SK_{ke} = \frac{P_{90}+P_{10}-2P_{50}}{P_{90}-P_{10}} \quad \text{or} \quad SK_{ke} = \frac{D_9+D_1-2D_5}{D_9-D_1}$$

2. **பியர்சனின் ஓராயக்குணகம்**

$$\text{பியர்சனின் ஓராயக்குணகம்} = \frac{\text{இடை - ஆகாரம்}}{\text{நியம விலகல்}}$$

or

$$= \frac{3\,(\text{இடை- இடையம்})}{\text{நியம விலகல்}}$$

$P > 0$ ஆயின், பரம்பல் நேர் ஓராயத்தைக் கொண்டதாகும்.

$P < 0$ ஆயின், பரம்பல் மறை ஓராயத்தைக் கொண்டதாகும்

$P = 0$ ஆயின், பரம்பல் பூச்சிய ஓராயத்தைக் கொண்டதாகும்.

3. **பௌலியின் ஓராயக்குணகம் அல்லது காலணை ஓராயக்குணகம்** $= \frac{(Q_1+Q_3-2Q_2)}{(Q_3-Q_1)}$

$Q_1 + Q_2 > 2Q_3$ பரம்பல் நேர் ஓராயத்தைக் கொண்டதாகும்.

$Q_1 + Q_2 < 2Q_3$ பரம்பல் மறை ஓராயத்தைக் கொண்டதாகும்.

$Q_1 + Q_2 = 2Q_3$ பரம்பல் பூச்சிய ஓராயத்தைக் கொண்டதாகும்.

உதாரணம்:

பொருளியல், கணக்கீடு, புள்ளிவிபரவியல், ஆங்கிலம் போன்ற பாடங்களில் பாடசாலையொன்றில் மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் தொடர்பான சில தரவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. ஆவற்றினை அடைப்புக்குள் தரப்பட்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி பகுப்பாய்வு செய்க.

- பொருளியல் $\bar{x} = 48$, $Md = 45$, $S = 10$ $\left[\frac{3(\bar{x} - Md)}{S}\right]$
- கணக்கீடு $\bar{x} = 52$, $Mo = 45$, $S = 5$ $\left[\frac{(\bar{x} - Mo)}{S}\right]$
- வணிகப் புள்ளிவிபரவியல் $Q_1 = 42$, $Q_2 = 50$, $Q_3 = 62$ $\left[\frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}\right]$
- ஆங்கிலம் $P_{90} = 60$, $P_{50} = 52$, $P_{10} = 48$ $\left[\frac{P_{90} + P_{10} - 2P_{50}}{P_{90} - P_{10}}\right]$

பொருளியல்: $$= \frac{3(\bar{x} - Md)}{S} = \frac{3(48-52)}{10} = \frac{(3\times -4)}{10}$$

$$= \frac{-12}{10} = -2$$

கணக்கீடு $$= \frac{(\bar{x} - Mo)}{S} = \frac{52-45}{5} = \frac{7}{5} = 1.4$$

வணிகப் புள்ளிவிபரவியல் $= \frac{Q_3+Q_1-2Q_2}{Q_3-Q_1} = \frac{62+42-2\times50}{62-42}$

$$= \frac{104-100}{20} = \frac{4}{20} = 0.2$$

ஆங்கிலம் $= \frac{P_{90}+P_{10}-2P_{50}}{P_{90}-P_{10}} = \frac{60+48-2\times52}{60-48}$

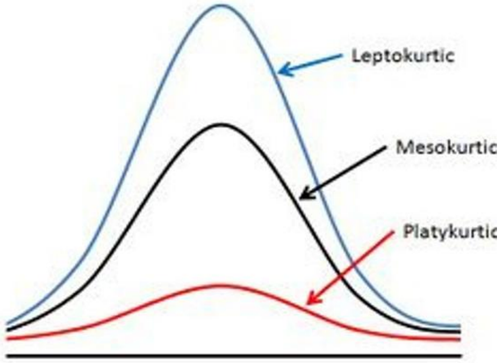
$$= \frac{108-112}{12} = 0.33$$

பொருளியல், ஆங்கிலம் போன்ற பாடங்களுக்கு மறை ஓராயம் காணப்படுகின்றது.

கணக்கீடு, வணிகப் புள்ளிவிபரவியல் போன்ற பாடங்களுக்கு நேர் ஓராயம் காணப்படுகின்றது.

குடில அளவை

பரம்பலொன்றின் உச்சி பற்றிய அளவீடு குடிலம் என அழைக்கப்படும். பரம்பலொன்றின் குடிலம் பொதுவாக, சீரான பரம்பலொன்று செவ்வன் பரம்பலொன்றுக்கு ஒத்ததாகக் காணப்படும். பொதுவாக மேலே உயர்ந்த உச்சியைக் கொண்ட பரம்பலொன்று உயர் குடிலம் என அழைக்கப்படுவதுடன், அந்தளவு உயர்வற்றதாகவுள்ள தட்டையான உச்சியுடன் கூடிய பரம்பலானது தாழ் குடிலம் என அழைக்கப்படும். உயர்ந்த உச்சியையும், தாழ் உச்சியைப் பெற்றிராத இவை இரண்டுக்குமிடைப்பட்ட அளவு கொண்ட உச்சியுடனான பரம்பல் சம குடிலப் பரம்பல் என அழைக்கப்படும்.



உயர் குடிலம்

சம குடிலம்

தாழ் குடிலம்

குடிலத்தை அளவிடுவதற்கு காலணை, சதமணை உதவியுடன் விளக்கப்பட்டுள்ள, சதமணைக் குடிலக் குணகம் (K) பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

$$K = \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{P_{90} - P_{10}}$$

$K > 0$: செவ்வன் பரம்பலின் உச்சியை விட வளையி உயர் உச்சியைக் கொண்டுள்ளது.

$K < 0$: செவ்வன் பரம்பலின் உச்சியை விட வளையி தாழ் உச்சியைக் கொண்டுள்ளது.

உதாரணம் :

ஒரே தரத்தைச் சேர்ந்த மூன்று வகுப்புக்களின் மாணவர்கள் பெற்ற கணிதப் பாடத்திற்கான புள்ளிகள் பின்வரும் மீடிறன் பரம்பலில் காட்டப்படுகின்றது.

தரம் A யின் புள்ளிகளின் பரம்பல்

$Q_1 = 15$ $P_{10} = 10$
$Q_3 = 40$ $P_{90} = 48$

தரம் B யின் புள்ளிகளின் பரம்பல்

$Q_1 = 19$ $P_{10} = 15$
$Q_3 = 30$ $P_{90} = 36$

தரம் C யின் புள்ளிகளின் பரம்பல்

$Q_1 = 15$ $P_{10} = 8$
$Q_3 = 20$ $P_{90} = 60$

பின்வரும் சூத்திரத்தில் அப்பெறுமதிகளைப் பிரதியீடு செய்து குடிலக் குணகத்தைக் கணிக்கவும்.

$$K = \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{P_{90} - P_{10}}$$

A வகுப்பிற்கானது

$$= \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{P_{90} - P_{10}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(40 - 15)}{42 - 13} = \frac{12.5}{29}$$

$= 0.431$

B வகுப்பிற்கானது

$$= \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{P_{90} - P_{10}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 11}{21} = \frac{5.5}{21}$$

$= 0.2619$

C வகுப்பிற்கானது

$$= \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{P_{90} - P_{10}} = \frac{5}{52}$$

$= 0.0962$

சுருக்கம்

ஒரே சீராக அமையாத மீடிறன் பரம்பலின் போக்கு ஓராயம் எனப்படும்.

குடில அளவானது ஒரு பரம்பலிற்கு ஒத்த மீடிறன் வளையில் சிகரங்களின் தன்மையை (உச்சியை) குறிக்கின்றது.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. ஓராயம், குடிலம் ஆகிய இரு பதங்ளையும் வேறுபடுத்துக.

2. ஒரு தரவுத் தொகுதியின் பரம்பலின் வடிவத்தினை இனங்காண்பதற்கு ஓராய அளவைகள், குடில அளவைகளின் முக்கியத்துவத்தினை விளக்குக.

3. ஒரு பரம்பலின் பொலிவின் ஓராயக்குணகம் - 0.36 உம் முதலாம் காலணை 8.6 உம் இடையம் 12.3 உம் ஆயின் அரைக்காலணை இடைவீச்சைக் காண்க.

4. தொழிற்சாலையொன்றின் அன்றாடக் கூலி பெறும் பணியாளர்கள் 100 பேரின் அன்றாடக் கூலிகள் தொடர்பான மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இடை, மாறல் குணகம், பியர்சனின் ஓராயக்குணகம், பொலிவின் ஓராயக்குணகம், குடிலக் குணகம் என்பவற்றைக் காண்க.

கூலி (ரூ. 000)	501-550	551-600	601-650	651-700	701-750	751-800
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	04	13	35	29	10	07

5. ஒரு தொழிற்சாலையில் 60 தொழிலாளர்களின் கூலி பின்வரும் பரம்பலில் தரப்படுகின்றது.

கூலி (ரூ. 000)	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-59
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	03	10	20	15	05	04	03

மேலுள்ள பரம்பலுக்கான கால் பியர்சனின் ஓராயக் குணகத்தினைக் கணித்து பரம்பல் தொடர்பாக கருத்துரைக்குக.

திறவுச் சொற்கள்

ஓராயம், குடிலம்

உசாத்துணை நூற்கள்

Freeman, J., Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., & Shoesmith, E. (2017). *Statistics for Business and Economics*. (4th ed.). Cengage

Gupta, C.S. (2013). *Fundamentals of Statistics*. Himalaya Publishing House

McClave, B., & Sincich. (2001). *Statistics for Business and Statistics*. Prentice Hall.

அத்தியாயம் - 8

தொடைக் கோட்பாடுகளுக்கான அறிமுகம்

பொருளடக்கம் **பக்கம்**

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஒரே தன்மை கொண்ட பொருட்களை உள்ளடக்கிய தொகுதி தொடைகள் எனப்படும். தொடையின் அனைத்து மூலகங்களையும் இரட்டை அடைப்புகளினுள்ளே எழுதுவதன் மூலம் தொடை ஒன்று குறிப்பிடப்படும். ஒரு இரட்டை அடைப்பினுள்ளே மூலகங்களை எழுதுதல், ஒரு வென்வரிப்படத்தில் தொடையின் மூலகங்களை எழுதுதல், தொடைப் பிறப்பாக்கி வடிவம் மூலம் காட்டுதல் என நான்கு முறைகளுள் குறிப்பீடு செய்யலாம். தொடைகள் பற்றிய கற்றலில் பயன்படுத்தப்படும் தொடைச் செய்கைகள் மூன்று ஆகும். அவை தொடைகளின் இடைவெட்டு, தொடைகளின் ஒன்றிப்பு, தொடைகளின் நிரப்பி எனப்படும். முடிவுள்ள இரண்டு தொடைகள் சார்ந்ததாக வென்வரிப்படம் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

தொடைகள், தொடைச் செய்கைகள், பிரயோகங்கள் மற்றும் வென்வரிப்படத்தில் குறித்தல் தொடர்பாக விளக்குதல்.

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் தொடைகள் தொடைக் குறியீடுகள் மற்றும் வென்வரிப்படத்தில் குறிக்க முடியுமாக இருப்பர்

தொடைக் கோட்பாடுகளுக்கான அறிமுகம்

நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஒரே தன்மை கொண்ட பொருட்களை உள்ளடக்கிய தொகுதி தொடைகள் எனப்படும்.

- இலங்கையின் கிழக்கு மாகாணத்திற்குரிய மாவட்டங்களைக் கொண்ட தொடை

  S = {அம்பாறை, மட்டக்களப்பு, திருகோணமலை}
- 0 இற்கும் 10 இற்குமிடையே உள்ள ஒற்றை எண்களைக் கொண்ட தொடை

  S = {1, 3, 5, 7, 9}
- MATARA என்னும் சொல்லை ஆக்கியுள்ள எழுத்துக்களைக் கொண்ட தொடை

  S = {A, M, R, T}

தொடையின் குறிப்பீடு

தொடையின் அனைத்து மூலகங்களையும் இரட்டை அடைப்புகளினுள்ளே எழுதுவதன் மூலம் தொடை X ஐ எழுதலாம்.

X = {0 இற்கும் 10 இற்குமிடையே உள்ள இரட்டை எண்கள் }

X = {2, 4, 6, 8 }

மூலகங்கள் (elements) - $\in$

ஒரு குறித்த தொடைக்குரிய பொருள்கள் அத்தொடையின் மூலகங்கள் எனப்படும். மூலகங்கள் அத் தொடையின் உறுப்புக்கள் எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. தொடையொன்றில் ஒரு மூலகம் ஒரு தடைவ மட்டும் எழுதப்படும்.

P = {book எனும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்கள்} P = { b, o, k }

Q = {24742 எனும் எண்ணில் உள்ள இலக்கங்கள்} Q = {2, 4, 7}

தொடையொன்றில் ஓர் மூலகம் உண்டு எனின் " ∈ " எனும் அடையாளமும், இல்லை எனின் " ∉ " எனும் குறியீடும் பயன்படுத்தப்படும்.

$A = \{ b,o,k\}$ $k \in A$ $a \notin A$

தொடை ஒன்றிலுள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை அத் தொடையின் முதலிமை எனப்படும்.

$P = \{ 5, 10, 15, \}$ $n(P) = 3$

தொடைகளின் பிரதிபலிப்புக்கள் (Representation of Set)

1. கூற்று வடிவம் (Statement form)

   A = {7 இலும் குறைந்த ஒற்றை எண்கள்}

2. மூலக வடிவம் (Roster form)

   $A = \{1, 3, 5\}$

3. பிறப்பாக்கி (Set builder form)

   A = { x|x ஆனது 7 இலும் குறைந்த ஒற்றை எண்கள்}

சூனியத்தொடை

மூலகங்கள் எதுவுமற்ற தொடை சூனியத்தொடை எனப்படும். இது { } அல்லது ∅ எனும் குறியீட்டால் காட்டப்படும்.

P = {10 - 15 இடைப்பட்ட சதுர எண்கள்} P= { } அல்லது $P = \emptyset$

முடிவுள்ள தொடைகளும் முடிவிலித் தொடைகளும்

மூலகங்களை உறுதியாக அறிந்து கொள்ளக்கூடிய பொதுப் பண்பு ஒன்றின் மூலம் எழுதப்பட்டுள்ள இரண்டு தொடைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

A = {0 இற்கும் 20 இற்குமிடையே உள்ள 3 இன் மடங்குகள்}

B = {5 இன் மடங்குகள்}

இவ்வொவ்வொரு தொடையினதும் மூலகங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

A = {3, 6, 9, 12, 15, 18}

B = {5, 10, 15, 20, …..}

மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியாக கூற முடியுமாயின் அவ்வாறான தொடைகள் **முடிவுள்ள தொடைகள்** எனப்படும்.

மேலே உள்ள தொடை B இல் மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியாக கூற முடியாது. அதாவது இதன் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை எல்லையற்றதாகும். தொடை B இன் மூலகங்களை எழுதும்போது இறுதியில் மூன்று குற்றுக்கள் இடுவதன் மூலம் அதன் மூலகங்கள் எல்லையற்றன என்பது காட்டப்படுகிறது. இவ்வாறு மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியாக கூற முடியாத தொடைகள் **முடிவிலித் தொடைகள்** எனப்படும்.

சமதொடைகள்

ஒரேமாதிரியான மூலகங்களைக் கொண்ட தொடைகள் சம தொடைகள் ஆகும்.

A = { 3,5,7,9 }   B = { 9,7,5,3 }

இங்கு A=B ஆகும்

சமவலுத் தொடைகள்

முதலிமை சமனாகவுள்ள தொடைகள் சமவலுத் தொடைகள் ஆகும்.

A = { 3,5,7,9 }   B = { n, m, b, r }

$$n(A) = n(B)$$

அகிலத்தொடை – ε

தொகுதி ஒன்றிலுள்ள அனைத்து தொடைகளையும் உள்ளடக்கிய மிகப் பெரிய தொடை அகிலத்தொடை எனப்படும். இது "ε" எனும் குறியீடால் குறிக்கப்படும்.

ε = {எண்ணும் எண்கள்}

P = {இரட்டை எண்கள்} R = {ஒற்றை எண்கள்}

Q = {முக்கோண எண்கள்} S = { முதன்மை எண்கள்}

உபதொடை

ஒரு தொடையில் உள்ள மூலகங்கள் சிலவற்றை அல்லது அனைத்தையும் கொண்டு உருவாக்கப்படும் புதிய தொடை முந்திய தொடையின் உபதொடை அல்லது தொடைப்பிரிவு அழைக்கப்படும்.

A = { 1,2,3,4,5 } B = { 2,4}

$B \subset A$ இங்கு B யானது Aயின் தொடைப்பிரிவு ஆகும்.

Note : தொடையொன்றின் முதலிமை n எனின் அத்தொடையைக் கொண்டு உருவாக்கக் கூடிய உப தொடைகளின் எண்ணிக்கை 2^n ஆகும்.

உதாரணம்

A = { 1, 2, 3, }

தொடை Aயின் உப தொடைகள் பின்வருமாறு

{ 1 }, { 2 }, { 3 } , { 1, 2 }, { 1,3 }, { 2,3 } , { 1,2,3 }, { }

அடுக்குத் தொடை (Power set)

ஒரு தொடைக்கு சார்பாக உள்ள அனைத்து உப தொடைகளையும் உள்ளடக்கிய தொடையாகும்

A = { a, r }

$\mathcal{P}$(A) = **{** { } , { a}, {r}, { a,r} **}**

இங்கு $\mathcal{P}$(A) என்பது தொடை Aயின் அடுக்குத் தெடையாகும்.

$$n\,[\mathcal{P}(A)] = 2^2 = 4$$

தொடைகளின் ஒன்றிப்பு

இரண்டு தொடைகள் காணப்படும் போது அவை இரண்டிலும் காணப்படும் அனைத்து மூலகங்களையும் கொண்டு உருவாக்கப்படும் புதிய தொடையாகும்.

A = { 3, 5 }　　B = { 1, 3, 5, 7, 9 }　　A ∪ B = { 1, 3, 5, 7, 9 }

இங்கு ∪ என்பது ஒன்றிப்புக்கான குறியீடாகும்.

தொடைகளின் இடைவெட்டு

இரண்டு தொடைகள் காணப்படும் போது அவை இரண்டிலும் காணப்படும் பொதுவான மூலகங்களைக் கொண்டு உருாக்கப்படும் புதிய தொடையாகும்.

A = {3, 5, 2}　　B = {1, 3, 5, 7, 9}　　A ∩ B = {3, 5}

இங்கு ∩ என்பது ஒன்றிப்புக்கான குறியீடாகும்.

தொடைகளின் வித்தியாசம்

- A \ B அல்லது A-B என்பது A,B ஆகிய தொடைகளில் A யில் மாத்திரம் காணப்படும் மூலகமாகும்
- B \ A அல்லது B-A என்பது A,B ஆகிய தொடைகளில் B யில் மாத்திரம் காணப்படும் மூலகமாகும்

A= { 1, 2, 3, 4, 5 }　　B= {2, 4, 6 }

A \ B = {1, 3, 5 }　　B \ A = {6}

தொடைகளின் சமச்சீர் வித்தியாசம்

இரண்டு தொடைகளிலுமுள்ள ஆனால் இடைவெட்டில் வராத மூலகங்களை உள்ளடக்கிய தொடை

A= { 1, 2, 3, 4, 5 }   B= {2, 4, 6 }

$A \oplus B = \{ 1, 3, 5, 6 \}$

நிரப்பித்தொடை

A' என்பது A யில் காணப்படாத அகிலத் தொடைக்குட்பட்ட மூலகங்களை கொண்டு உருவாக்கப்படும் தொடையாகும்.

உதாரனம் :- $\boldsymbol{\varepsilon} = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \}$

$A = \{ 2,4,6,8\}$ $A' = \{ 1,3,5,7.9\}$

தொடைச் செய்கைகள்

01) A U Ø = A

உதாரணம்:   A = { 3, 5,7 }   Ø = { }

A U Ø = { 3,5,7} = A

02) A U $\boldsymbol{\varepsilon}$ = $\boldsymbol{\varepsilon}$

உதாரணம்: $\varepsilon = \{1, 2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 \}$

A = { 3, 5, 7 }

A U ε = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 } = ε

03) $\mathbf{A \cap A' = \emptyset}$

உதாரணம்: $\varepsilon = \{ 1, 2, 3, 4 ,5 ,6 \}$

$A = \{ 3, 5, 2 \}$ $A' = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

$A \cap A' = \emptyset$

04) $\mathbf{A \cup A' = \boldsymbol{\varepsilon}}$

உதாரணம்: $\varepsilon = \{ 1, 2, 3, 4 ,5 ,6 \}$

$A = \{ 3, 5, 2 \}$ $A' = \{ 1, 3, 5, 7, 9$

$A \cup A' = \varepsilon$

பரிவர்த்தன விதி

- $\mathbf{A \cap B = B \cap A}$
- $\mathbf{A \cup B = B \cup A}$

உதாரணம்: $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ $B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

$A \cap B = B \cap A = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8 \}$

தொகுப்பு விதி

- $\mathbf{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C}$
- $\mathbf{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C}$

உதாரணம்:

$A = \{1, 2, 3 \}$ $B = \{ 2, 4, 6 \}$ $C = \{ 1, 4, 9 \}$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C =\{ 1,2,3,4,6,9 \}$

பரம்பல் விதி

- $\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
- $\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$

உதாரணம்:

$A = \{1, 2, 3 \}$

$B = \{ 2, 4, 6 \}$

$C = \{ 1, 4, 9 \}$

$B \cup C = \{ 1,2,4,6,9 \}$ $A \cap B = \{ 2 \}$ $A \cap C = \{ 1 \}$

$A \cap (B \cup C) = \{ 1, 2 \}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{ 1,2 \}$

ஆகவே, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$B \cap C = \{ 4 \}$ $A \cup B = \{ 1,2,3,4,6 \}$ $A \cup C = \{ 1,2,3,4,9 \}$

$A \cup (B \cap C) = \{ 1,2,3,4 \}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{ 1,2,3,4 \}$

ஆகவே, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

டி மோகனின் விதி

- $\mathbf{(A \cup B)' = A' \cap B'}$
- $(\mathbf{A \cap B})' = \mathbf{A' \cup B'}$

உதாரணம்:

$$\varepsilon = \{ 1, 2, 3, 4 ,5 ,6 \}$$

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ $A' = \{ 5, 6 \}$

$B = \{ 2, 4, 6, \}$ $B' = \{ 1, 3, 5 \}$

$(A \cup B) = \{ 1, 2, 3, 4, 6 \}$

$(A \cup B)' = \{ 5 \}$ $A' \cap B' = \{ 5 \}$

ஆகவே, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

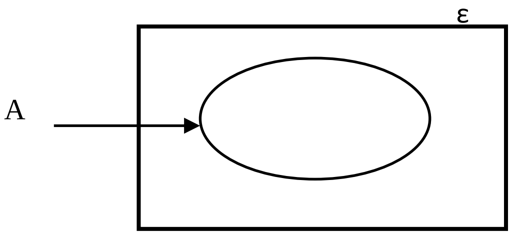
$(A \cap B) = \{ 2, 4 \}$

$(A \cap B)' = \{ 1, 3, 5, 6 \}$ $A' \cup B' = \{ 1, 3, 5, 6 \}$

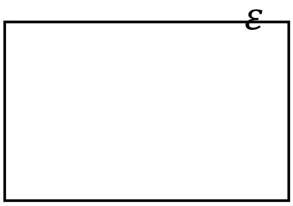
ஆகவே, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

வெண்வரிப்படம்

தொடைகளை மூடிய உரு ஒன்றினுள் மூலகமாகக் காட்டுவது வெண்வரிப்படம் ஆகும்.

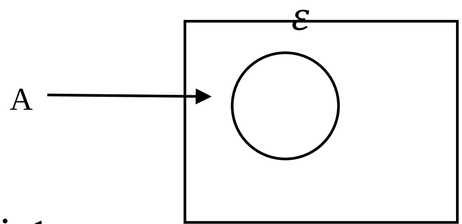


வெண் வரிப்படங்களை வரையும்போது அகிலத் தொடை ஒரு செவ்வகத்தினுள்ளே பின்வருமாறு குறித்துக் காட்டப்படும்.



அகிலத் தொடையின் தொடைப் பிரிவுகள் வளைந்த கோட்டிலான மூடிய உருக்களினால் (வட்டம், நீள்வட்டம் போன்றவை) காட்டப்படும்.

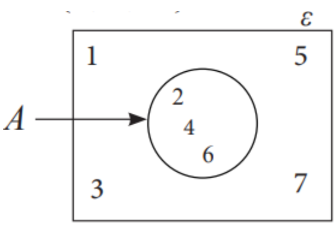
ஒரு தொடைப் பிரிவுடன் கூடிய அகிலத் தொடை ஒன்றின் வெண் வரிப்படம் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.



உதாரணம் 1

$\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

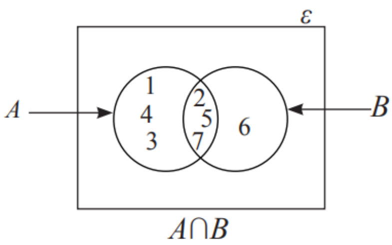


தொடைகளின் இடைவெட்டு

A = {1, 2, 3, 4, 5, 7}

B = {2, 5, 6, 7}

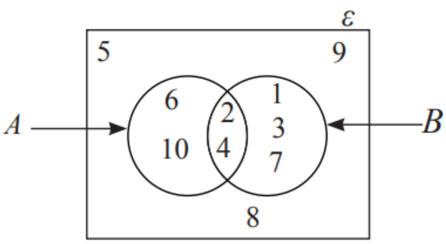
A∩B = {2, 4, 7}



2, 5, 7 எனும் மூலகங்கள் B இலும் காணப்படுகின்றன. தொடையில் ஒரு மூலகம் ஒரு தடைவ மட்டுமே எழுதப்படுவதால் B ஆனது A உடன் தொடர்புற்றிருக்குமாறு வரையப்படும்.

உதாரணம்:

கீழே தரப்பட்டுள்ள வெண் வரிப்படத்திலிருந்து வினாக்களுக்கு விடை எழுதுக.



i. தொடை A இன் மூலகங்களை எழுதுக. A = {2, 4, 6, 10}

ii. தொடை B இன் மூலகங்களை எழுதுக. B = {2, 4, 1, 3, 7}

iii. அகிலத் தொடையின் மூலகங்களை எழுதுக.
ε = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

iv. A∩B இன் மூலகங்களை எழுதுக. A∩B = {2, 4}

v. A∪B இன் மூலகங்களை எழுதுக. A∪B = {1, 2, 3, 4, 6, 7, 10}

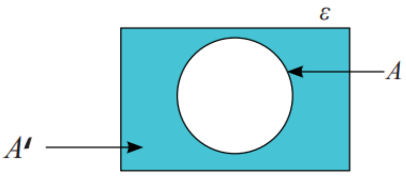
தொடையொன்றின் நிரப்பி

ε = {பறவைகள்}

A = {கூடு கட்டும் பறவைகள்}

A' = {கூடு கட்டாத பறவைகள்}

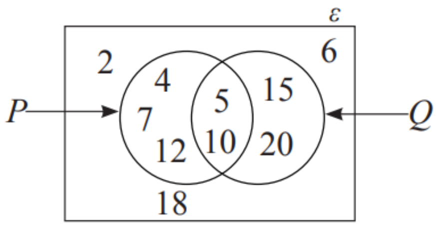
A என்பது ஓர் அகிலத் தொடையின் (ε) ஒரு தொடைப் பிரிவாயின், அதனை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் இவ்வாறு காட்டலாம்.



A' என்பது A ஐச் சாராத ε இன் எஞ்சிய மூலகங்கள் ஆகையால் தொடை A யைத் தவிர எஞ்சிய பிரதேசம் A' ஐச் சார்ந்ததாகும்.

உதாரணம்

வெண் வரிப்படத்திற்கேற்ப கீழே தரப்பட்டுள்ளவற்றைக் காண்க.



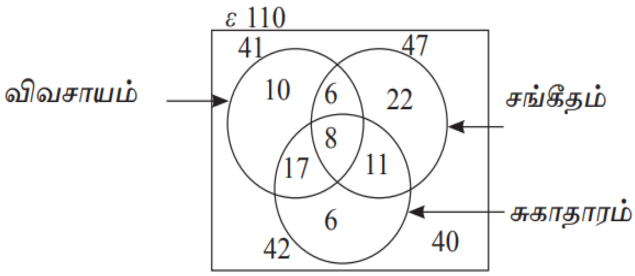
i. P' = {2, 6, 15, 18, 20}

ii. Q' = {2, 4, 6, 7, 12, 18}

உதாரணம்

120 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவில் 41 மாணவர்கள் விவசாயத்தையும் 47 மாணவர்கள் சங்கீதத்தையும் 42 மாணவர்கள் சுகாதாரத்தையும் கற்கின்றனர். 14 மாணவர்கள் விவசாயத்தையும் சங்கீதத்தையும் 19 மாணவர்கள் சங்கீதத்தையும் சுகாதாரத்தையும் 25 மாணவர்கள் விவசாயத்தையும் சுகாதாரத்தையும் 8 மாணவர்கள் மூன்று பாடங்களையும் கற்கின்றனர். இத்தகவல்களை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் காட்டி பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

i.



ii. விவசாயத்தை மாத்திரம் கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது? 10

iii. ஒரு பாடத்தை மாத்திரம் கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது? $10 + 22 + 6 = 38$

iv. இரு பாடங்களையேனும் கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது? $17 + 6 + 11 + 8 = 42$

v. ஒரு பாடத்தையேனும் கற்காத மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது? 40

சுருக்கம்

தொடை ஒன்றை விபரித்தோ, மூலகங்களாகவோ அல்லது வெண் உருவிலோ காட்ட முடியும்.

தொடை ஒன்றை மூலகங்களாக காட்டும் போது ஒரு மூலகம் ஒரு தடைவ மட்டுமே எழுதப்படும்.

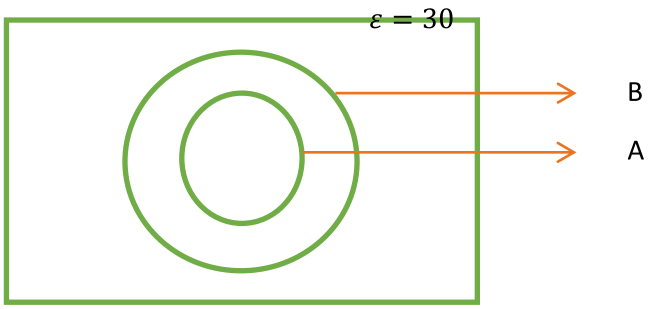
தொடைகளை வெண்உருவில் காட்டும் போது அகிலத் தொடையினுள் அமையும் உப தொடைகளாக மூடிய உருவினுள் காட்டப்படும்.

பயிற்சி

1. $n(A) = 19$, $n(B) = 16$, $n(A\cup B) = 35$ ஆயின், $n(A\cap B)$ ஐக் காண்க? இதற்கேற்ப A, B ஆகிய தொடையிலுள்ள சிறப்பியல்பு யாது?

2. $(P\cup R)' \cap Q$ எனும் பிரதேசத்தை வெண்வரிப்படத்தில் நிழற்றிக் காட்டுக?

3. A = {p, q, r, s} எனும் தொடையின் தொடைப்பிரிவுகள் யாவற்றையும் எழுதிக்காட்டுக?
4. கீழுள்ள வென்வெரிப்படத்தினைப் பயன்படுத்தி விடையளிக்க.



i. $B' \cap A$ எனும் பிரதேசத்தை நிழற்றிக் காட்டுக.
ii. $n(A') = 8, n(B' \cap A) = 10$ எனின் $n(B)$ ஐக் காண்க.

5. ஒரு வகுப்பறையில் 35 மாணவர்கள் இருந்தனர். அவர்களுள் 11 மாணவர்கள் கணிதப் பாடத்தை விரும்பினர். 14 மாணவர்கள் விஞ்ஞானப் பாடத்தையும் 18 மாணவர்கள் சிங்களப் பாடத்தையும் விரும்பினர். அவர்களுள் 8 மாணவர்கள் விஞ்ஞானப் பாடத்தையும் கணிதப் பாடத்தையும் விரும்பினர். அவர்களுள் 9 மாணவர்கள் விஞ்ஞானப் பாடத்தையும் சிங்களப் பாடத்தையும் விரும்பினர். அவர்களுள் 7 மாணவர்கள் கணிதப் பாடத்தையும் சிங்களப் பாடத்தையும் விரும்பினர். மேலும் 5 மாணவர்கள் மூன்று பாடங்களையும் விரும்பினர்.

   i. வென்வரிப்படத்தினை வரைந்து தரப்பட்ட தரவுகளைக் குறிக்குக
   ii. கணிதப் பாடத்தை மாத்திரம் விரும்பிய மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

iii. ஒரு பாடத்தை மாத்திரம் விரும்பிய மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

iv. ஆகக் குறைந்தது இரு பாடங்களையேனும் விரும்பிய மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

v. விஞ்ஞானப் பாடத்தை விரும்பாத மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

உசாத்துணை நூற்கள்

Freeman, J., Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., & Shoesmith, E. (2017). *Statistics for Business and Economics*. (4th ed.). Cengage

Gupta, C.S. (2013). *Fundamentals of Statistics*. Himalaya Publishing House

அத்தியாயம் - 9

எண்கணிய நுட்பங்கள்

பொருளடக்கம் **பக்கம்**

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

a, b என்னும் இரு எழுத்துக்கள் ஒரு வரிசையில் ab, ba எனும் இரு வகைகளில் வைக்கப்படலாம். இவ்விரு வகைகளும் இவ் இரு எழுத்துக்களின் வரிசை மாற்றம் எனப்படும். இதே போல் a, b, c எனும் மூன்று எழுத்துக்களை கருதுவோமாயின் இம்மூன்று எழுத்துக்களையும் ஓர் வரிசையில் அமைப்பின் abc, acb, bca, bac, cab, cba எனும் ஆறு வகைகளில் அமைக்கலாம்.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

காரணிய அறிவு, வரிசை மாற்ற நுட்பங்கள், சேர்மான நுட்பங்கள் தொடர்பாக விளக்குதல்.

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் வரிசை மாற்ற நுட்பங்கள், சேர்மான நுட்பங்களை பிரயோகிக்க முடியுமாக இருப்பர்.

காரணியம்

ஒன்றிற்கொன்று வேறுபட்ட பொருட் தொகுதியொன்று வழங்கப்பட்டிருக்கும் பொழுது அவற்றை முதலாவதாக n_1 முறையிலும் இரண்டாவதை n_2 முறையிலும் ஒழுங்கு

முறைப்படுத்தும் போது மொத்த ஒழுங்கு முறைப்படுத்தப்பட்டவைகளின் எண்ணிக்கை $n_1 \times n_2$ ஆகக் காணப்படும்.

காரணியக் குறியீடு (Factorial Notation) பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

F (0) = 1

F (1) = 1 × F (0) = 1 × 1 = 1

F (2) = 2 × F (1) = 2 × 1 = 2

$$\boxed{\mathrm{F(n) = n\,F(n-1)}}$$

உதாரணம்:

a, b, c, d, e ஆகிய எழுத்துக்கள் ஐந்திலிருந்தும் ஒன்றிற்கொன்று வேறுபட்ட 5 எழுத்துக்களுடன் வசனங்களை எழுதுக.

- வசனத்தின் முதலாவது எழுத்தை எத்தனை 5 முறைகளில் தெரிவு செய்யலாம்.
- முதலாவது எழுத்துத் தெரிவு செய்ததன் பின்னர் அவ்வசனத்தின் இரண்டாவது எழுத்தை 4 முறைகளில் தெரிவு செய்ய முடியும்.
- இரண்டு எழுத்துக்களையும் தெரிவு செய்ததன் பின்னர் வசனத்தின் மூன்றாவது எழுத்தை 3 முறைகளில் தெரிவு செய்ய முடியும்.
- மூன்று எழுத்துக்களையும் தெரிவு செய்ததன் பின்னர் நான்காவது எழுத்தை 2 முறைகளில் தெரிவு செய்ய முடியும்.
- அனைத்து எழுத்துக்களையும் தெரிவு செய்ததன் பின்னர் வசனத்தின் இறுதி எழுத்தை 1 முறைகளில் மாத்திரம் தெரிவு செய்ய முடியும்.

ஒன்றிற்கொன்று வேறுபட்ட 5 எழுத்துக்களை பல்வேறு மாற்ற முறைகளில் சீரமைத்து 120 வசனங்களை உருவாக்க முடியும். இவ்வாறு தெரிவு செய்யக்கூடிய வசனங்களின் எண்ணிக்கையானது

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

இதனை 5! எனக் குறிப்பிடப்படுகின்றது.

Note: $0! = 1$

உதாரணம்:

1. ஓர் பாடசாலையில் உள்ள 12 மாணவர்கள் ஓர் வரிசையில் அமர வைப்பதற்கு எத்தனை வழிகளில் அமர வைக்க முடியும். அமர வைக்க முடியுமான வழிகளின் எண்ணிக்கை.

   $12! = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

   $= 479001600$

2. ORANGE என்ற சொல்லில் A, E, G, N, O, R ஆகிய 6 எழுத்துக்களும் ஒவ்வொரு தடவையே இடம்பெறுகின்றன (எல்லாம் வித்தியாசமானவை). இவை எல்லாவற்றையும் பயன்படுத்தி அமைக்கக்கூடிய வித்தியாசமான சொற்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

   $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad = 720$

ஈருறுப்புக் குணகமும் பஸ்காலின் முக்கோணி விதியும் (Binomial Co – efficient & Pascal's Triangle)

$(a + b)^1, (a + b)^2, (a + b)^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a + b)^n$

ஈருறுப்புக் கோவைகளின் முழுவதன் வழுக்களின் விரிவினை எழுதும் போது உறுப்புக்களின் குணகங்களைத் தீர்மானிக்க பின்வரும் பஸ்கால் முக்கோணியைப் பயன்படுத்தலாம்.

Exponent	Pascal's Triangle	Binomial Expansion
0	1	$(a+b)^0 = 1$
1	1 1	$(a+b)^1 = a+b$
2	1 2 1	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 2b^2$
3	1 3 3 1	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
4	1 4 6 4 1	$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
5	1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

உதாரணம்:

ஈருறுப்புக் கோவைகளின் முழுவதன் வழுக்களின் விரிவினை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$(a+b)^2 = a^2b^0 + a^1b^1 + a^0b^2 \qquad = a^2 + 2ab + b^2$$

Note: இரண்டாம் வழுவில் உள்ளதால் பஸ்கால் முக்கோணியின் மேலிருந்து இரண்டாவது வரியினுடைய உறுப்புக்களுக்கான குணகங்களைத் தருகின்றது.

$$(a+b)^4 = a^4b^0 + a^3b^1 + a^2b^2 + a^1b^3 + a^0b^4$$

$$= a^3 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + b^4$$

Note: நான்காம் வழுவில் உள்ளதால் பஸ்கால் முக்கோணியின் மேலிருந்து நான்காவது வரியினுடைய உறுப்புக்களுக்கான குணகங்களைத் தருகின்றது

வரிசை மாற்றம் (Permutation)

இருவேறு எழுத்துக்கள் a, b ஐக் கருதுக. இரு எழுத்துக்களையும் பாவித்து செய்யப்படக் கூடிய வரிசை மாற்றம் ab, ba ஆகும்.

வேறு வேறான n பொருட்கள் உள்ள போது முதலாம் இடம் n வழிகளிலும், இரண்டாம் இடம் $(n-1)$ வழிகளிலும், மூன்றாம் இடம் $(n-2)$ வழிகளிலும் நிரப்பப்படலாம். எனவே அனைத்தும் வெவ்வேறான n பொருட்களின் வரிசை மாற்றம்

$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \mathbf{1}) \times (\mathbf{n} - \mathbf{2}) \times \ldots \ldots . \times \mathbf{3} \times \mathbf{2} \times \mathbf{1} = \mathbf{n}!$ வேறுவேறான n எழுத்துக்களில் இருந்து r பொருட்கள் எழுமாறாக தெரியப்பட்டு ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய முறை பின்வருமாறு காட்டப்படும். $nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$

உதாரணம்:

வகுப்பொன்றிலுள்ள 20 மாணவர்களுள் வகுப்புத்தலைவர் மற்றும் உப தலைவரைத் தெரிவு செய்வதற்கான தேர்தலில் பங்குபற்றுகின்றனர். எத்தனை வழிகளில் போட்டியாளர் தெரிவு செய்யப்படலாம்?

$$20P_2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!}$$

$$= \frac{20\times19\times18\times17\times16\times\ldots\ldots\ldots\ldots1}{18\times17\times16\times15\times14\times\ldots\ldots\ldots\ldots1} \quad = 380$$

உதாரணம் :

a, b, c, d ஆகிய நான்கு எழுத்துக்களிலிருந்து மீள்வைப்பின்றி ஒரே நேரத்தில் பெறக்கூடிய இரு எழுத்துக்களின் வரிசை மாற்றத்தைக் காண்க.

1 ஆவது எழுத்து 4 வேறுபட்ட வழிகளில் தெரிவு செய்யப்படலாம்.

2 ஆவது எழுத்து 3 வேறுபட்ட வழிகளில் தெரிவு செய்யப்படலாம். ஆகவே, $\mathbf{4 \times 3 = 12}$ வழிகளில் a, b, c, d ஆகிய நான்கு எழுத்துக்களிலிருந்து இரு எழுத்துக்களைக் கொண்ட வரிசை மாற்றத்தை ஒழுங்குபடுத்தலாம்.

$$P(4,2) = P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

சேர்மானங்கள் (Combinations)

ஒன்றிற்கொன்று வேறுபட்ட பொருள் n தொகையிலிருந்து தடவைக்கு பொருள்கள் r வீதம் தெரிவு செய்து எடுத்தலை r இன் சேர்மானம் என அடையாளப்படுத்தப்படும். அச்சேர்மான எண்ணிக்கையைப் பின்வருமாறு காட்ட முடியும்.

$$\mathrm{nCr} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{r!\,(n-r)!}}$$

உதாரணம்:

1. 7 ஆசிரியர்களிலிருந்தும் 4 மாணவர்களிலிருந்தும் 6 பேரைக் கொண்ட குழு ஒன்று எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

   11 பேரிலிருந்து 6 பேரைக் கொண்ட குழுக்களைத் தெரிவு செய்யும் வழிகள்

$$11\mathrm{C}_6 = \frac{11!}{6!(11-5)!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 462$$

2. குழுவில் 2 மாணவர்களும், 4 ஆசிரியர்களும் இருக்க வேண்டுமெனின் குழுக்களின் எண்ணிக்கை

$$7C_4 \times 4C_2 = \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} \times \frac{(4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)}$$

$$= 35 \times 6 = 210$$

3. ஒரு மாணவனும் இல்லாத குழுக்களின் எண்ணிக்கை $7C_6 = 7$
4. குறைந்தது ஒரு மாணவனைக் கொண்ட குழுக்களின் எண்ணிக்கை $= 462 - 7 = 455$
5. தெரிவு செய்யப்படக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை =

$$10C_3 = \frac{10!}{3!\times 7!}$$

$$= \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(3\times 2\times 1)\times(7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1)}$$

$$= 120$$

சுருக்கம்

1 2 3 4 5 … … … $(n - 1)$ n ஆனது $n!$ என குறியீட்டு ரீதியில் குறிக்கப்பட்ட காரணியம் என வாசிக்கப்படும்.

ஈருறுப்புக் கோவைகளின் முழுவதன் வழுக்களின் விரிவினை எழுதும் போது உறுப்புக்களின் குணகங்களைத் தீர்மானிக்க பஸ்கால் முக்கோணியை பயன்படுத்தலாம்.

ஒரு குறித்த எண்ணிக்கையான பொருட்களை வரிசைப்படுத்த வரிசைமாற்றம் உபயோகிக்கப்படும்.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. $(x + y)^8$ எனும் ஈருறுப்புக் கோவையின் விரிவாக்கத்தினை பஸ்காலின் முக்கோணியை பயன்படுத்தி பெறுக.

2. 10 வேறு வேறான நிறப்பேனாக்களில் இருந்து 3 பேனைகள் தெரிவு செய்யப்படல் வேண்டும். தெரிவு செய்யப்படக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையை காண்க.

3. நூலகம் ஒன்றிலுள்ள புத்தகத்தட்டில் வேறு வேறான 12 புத்தகங்கள் உள்ளன. இவற்றுள் 6 கணித புத்தகங்களும் 3 விஞ்ஞான புத்தகங்களும் 3 தமிழ் புத்தகங்களும் ஆகும்.

   a) இவற்றை இத்தட்டில் ஒழுங்காக அடுக்கி வைக்கப்படக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?
   b) ஒரே இனப் புத்தகங்கள் ஒன்றாக இருக்க அடுக்கி வைக்கப்படக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?
   c) ஒரே இனப் புத்தகங்களுக்கிடையில் வேற்றுமை இல்லாவிடில் அவற்றை அடுக்கி வைக்கக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?
   d) கணிதப்புத்தகங்கள் எப்போதும் முதலில் இருக்க, அடுக்கி வைக்கப்படக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையை காண்க?

திறவுச் சொற்கள்

சேர்மானம், வரிசைமாற்றம், காரணியம்

உசாத்துணை நூற்கள்

Freeman, J., Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., & Shoesmith, E. (2017). *Statistics for Business and Economics*. (4th ed.). Cengage

Gupta, C.S. (2013). *Fundamentals of Statistics*. Himalaya Publishing House

McClave, B., & Sincich. (2001). *Statistics for Business and Statistics*. Prentice Hall.

அத்தியாயம் - 10

நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகளுக்கான அறிமுகம்

பொருளடக்கம் **பக்கம்**

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

சிறந்த தீர்மானங்களை எடுப்பதற்கு நிச்சயமற்ற நிகழ்வுகளை அளவுரீதியாக, அளவிட வேண்டிய தேவை ஏற்படுகின்து. நிச்சயமற்ற நிகழ்வுகளை அளவு ரீதியாக அளவீடு செய்யும் நுட்ப முறையே நிகழ்தகவாகும். ஏதேனும் நிகழ்வொன்றின் நிகழ்தகவு 0 அல்லது 1 அல்லது அதற்கு இடைப்பட்ட பெறுமானமொன்றாக இருக்கலாம். யாதேனும் நிகழ்வொன்று நிச்சயமாக இடம்பெறுமாயின் அதன் நிகழ்தகவு ஒன்றாகும். எச்சந்தர்ப்பத்திலும் இடம்பெறாத நிகழ்வொன்றின் நிகழ்தகவு 0 ஆகும். நிசச்யமற்ற நிகழ்வொன்றின் நிகழத்கவு 0 - 1 இற்கும் இடையிலான பெறுமதியினை எடுக்கும்.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

பரிசோதனைகளும் எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகள், நிகழ்ச்சிகளும் மாதிரிவெளியும், நிகழ்தகவிற்கான வரைவிலக்கணம், நிகழ்தகவிற்கான அணுகுமுறைகள், நிகழ்தகவு தொடர்பான வெளிப்படை உண்மைகள் தொடர்பாக விளக்குதல்.

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் பரிசோதனைகளும் எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகள், நிகழ்ச்சிகளும் மாதிரிவெளியும், நிகழ்தகவிற்கான வரைவிலக்கணம், நிகழ்தகவிற்கான அணுகுமுறைகள், நிகழ்தகவு தொடர்பான வெளிப்படை உண்மைகள் தொடர்பாக விளங்கிக் கொள்ள முடியுமாக இருப்பர்.

பரிசோதனை எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகள்

அன்றாடம் சூழலில் நடைபெறும் நிகழ்ச்சியிகளை நிச்சயமாக நடைபெறுபவை, நிச்சயமாக நடைபெறாதவை, சிலவேளை நடைபெறும் நிகழ்ச்சிகள் என மூன்று வகைகளாக பிரிக்கலாம். பொதுவாக வாழ்க்கையில் நாம் முகம் கொடுக்கின்ற பெரும்பாலான நிகழ்வுகள் நிச்சயமற்ற தன்மையினைக் கொண்டது.

உதாரணம்

- பரீட்சையில் சித்தியடைதல்.
- தேர்தலில் வெற்றியடைதல்.

ஒரு நாணயத்தை மேலே எறிந்து கீழே விழுகின்ற பக்கத்தை அவதானித்தால், பரிசோதனையின் பெறுபேறுகளாக தலை விழுதல் அல்லது பூ விழுதல் கொள்ளப்படுகின்றது.

ஆனால் தலை விழுதல் பூ விழுதல் இரண்டிலும் எது நிகழுமென நிச்சயமாகக் கூற முடியாது. எனவே இது ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையாகும்.

பரிசோதனையொன்று எழுமாற்று பரிசோதனையாக இருக்க பின்வரும் அம்சங்களை கொண்டிருத்தல் வேண்டும்.

- அத்தியாவசியமான மாறா நிபந்தனையின் கீழ் இப்பரிசோதனை மீளவும் வரையறையற்ற பல தடவைகள் செய்யலாம்.

- பரிசோதனையின் பெறுபேறினை சரியாக எதிர்வு கூற முடியாது.
- பரிசோதனையின் இயல்தகு பேறுகள் கொண்ட தொடையினைக் கூற முடியும்.
- பரிசோதனை மீள மீளச் செய்யப்படக் கூடுமாதலால், பெறுபேறுகள் ஒழுங்கற்ற முறையில் தோன்றும்.

நிகழ்ச்சிகளும் மாதிரிவெளியும்

யாதேனம் ஒரு பரிசோதனையில் கிடைக்கத்தக்க எல்லா இயல்தகு பேறுகளையும் கொண்ட தொடை அப்பரிசோதனையின் மாதிரிவெளி எனப்படும். மாதிரிவெளியானது Ω அல்லது S என்பதால் குறிக்கப்படும்.

எளிய நிகழ்ச்சிகளும் கூட்டு நிகழ்ச்சிகளும்

ஒரு பேறு மாத்திரம் உள்ள நிகழ்ச்சி எளிய நிகழ்ச்சியாகும்.

உதாரணம்

முகங்களில் 1,2,3,4 எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள ஒரு நான்முகியை உருட்டும் போது உரிய மாதிரிவெளி $s = \{1,2,3,4\}$ ஆகும்.

இம்மாதிரிவெளிக்குரிய சில நிகழ்ச்சிகளாக,

$\{1\}$ என்பது 1 பெறப்படும் ஒரு நிகழ்ச்சி ஆகும்.

$\{2\}$ என்பது 2 பெறப்படும் ஒரு நிகழ்ச்சி ஆகும்.

$\{3,4\}$ என்பது 2 லும் கூடிய எண்கள் பெறப்படும் ஒரு நிகழ்ச்சி ஆகும்.

$\{1, 3\}$ என்பது ஒற்றை எண்கள் பெறப்படும் ஒரு நிகழ்ச்சி ஆகும்.

$\{1, 4\}$ என்பது சதுர எண்கள் பெறப்படும் ஒரு நிகழ்ச்சி ஆகும்.

போன்ற நிகழ்ச்சிகளைக் குறிப்பிடலாம்.

இங்கு, $\{1\}$, $\{2\}$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் ஒரு பேறு மாத்திரம் உள்ள தொடைப்பிரிவுகளாகும்.

இவ்வாறு, மீண்டும் பிரிவுகளாக்க முடியாத நிகழ்ச்சிகள் எளிய நிகழ்ச்சிகளாகும்.

கூட்டு நிகழ்ச்சி

ஒரு நிகழ்ச்சியானது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட எளிய நிகழ்ச்சிகளைக் கொண்டிருப்பின் அந்நிகழ்ச்சி கூட்டு நிகழ்ச்சி எனப்படும்.

உதாரணம்

மேற்குறிப்பிட்ட உதாரணத்தில் $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$ போன்ற மேலும் தொடைப் பிரிவுகளாக வேறாக்க முடியமாக நிகழ்ச்சிகள் கூட்டு நிகழ்ச்சிகளாகும்.

சூனிய நிகழ்ச்சி (Null event)

மூலகங்கள் எதுவுமற்ற தொடை சூனியத்தொடை எனப்படும். சூனியத் தொடைக்குரிய நிகழ்ச்சி, அதாவது நிகழ்ச்சிகள் எதுவுமற்ற தொடை சூனிய நிகழ்ச்சி எனப்படும். இந்நிகழ்ச்சி $\emptyset$ என்பதால் குறிக்கப்படும்.

உதாரணம்

முகங்களில் 1,2,3,4 எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள ஒரு நான்முகியை உருட்டும் போது 5 எனும் இலக்கம் கிடைக்கப்பெறுதல்.

நிரப்பி நிகழ்ச்சி (Complementary event)

முகங்களில் 1,2,3,4 எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள ஒரு நான்முகியை உருட்டும் போது உரிய மாதிரிவெளி $s = \{1,2,3,4\}$ ஆகும்.

இங்கு இரட்டை எண் கிடைக்கப் பெறும் நிகழ்ச்சி $A = \{2,4\}$ எனின், நிகழ்ச்சி A நிகழாமை அதாவது இரட்டை எண் அல்லாத எண் கிடைக்கப்பெறும் நிகழ்ச்சி B எனப்படும்.

$B = \{1,3\}$ ஆகும்.

மேற்குறித்த பரிசோதனையில் இரட்டை எண் கிடைக்கப்பெறும் நிகழ்ச்சி A எனின், இரட்டை எண் கிடைக்கப் பெறாத நிகழ்ச்சி A யின் நிரப்பி நிகழ்ச்சி எனப்படும். இது A' எனக் குறிப்பிடப்படும்.

$A' = \{1,3\}$

சமநேர்தகவுள்ள பேறுகள் (Equally likely outcomes)

யாதுமொரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் போது, பெறப்படும் ஒரு பேறு, வேறொரு பேறிலும் கூடுதலாக நடைபெறும் என விசேடமாகக் கூறமுடியாதெனின், அப்பேறுகள் யாவும் சமநேர்தகவுடைய பேறுகள் எனப்படும். உதாரணம்

கோடாத தாயக்கட்டை ஒன்று எறியப்படுகிறது $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

a) ஒற்றை எண் பெறுவதற்கான நிகழ்ச்சி A, $A = \{1, 3, 5\}$

b) முதன்மை எண் பெறுவதற்கான நிகழ்ச்சி B, $B = \{2, 3, 5\}$

நிகழ்தகவிற்கான வரைவிலக்கணம்

நிகழ்தகவு என்பது ஏதேனும் நிகழ்வொன்று இடம்பெறுவதற்கு அல்லது இடம்பெறாதிருப்பதற்குரிய இயலுமையை பெறுமான ரீதியாக அளவீடு செய்யும் அளவீடாகும்.

நிகழ்தகவிற்கான பழைய அணுகுமுறை

மாதிரிவெளி அல்லது நிகழ்தகவு வெளியில் நிகழ்ச்சிகள் முடிவானதாகவும் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு சமமாகவும் இருப்பின், ஒரு நிகழ்ச்சி (E) நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(E)$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$n(E)$: குறித்த நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கு சாதகமாக நிகழும் தடவைகளின் எண்ணிக்கை

$n(S)$: சாத்தியமான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை

வரையறைகள்

1. எல்லா நிகழ்ச்சிகளும் சமமான நிகழ்தகவினைக் கொண்டிருப்பதில்லை
2. நிகழ்ச்சிகள் முடிவுற்று இருக்கும் போது இம்முறை பயன்படுத்த முடியாது.

நிகழ்தகவிற்கான சார்பு மீடிறன் அனுகுமுறை

ஒரு பரிசோதனையானது சீரான நிலைமைகளின் கீழ் அதிக தடவைகள் மீள் மேற்கொள்ளப்படும் போது ஒரு குறித்த நிகழ்ச்சி நிகழும் எண்ணிக்கையானது மொத்த முயல்வுகளின் எண்ணிக்கைக்கு எல்வை சார்பு விகிதமாக காணப்படும். இச் சார்பு விகிதம் அந்நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு எனப்படும். இதனை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{N}\right) = P$$

n = குறித்த நிகழ்ச்சி நிகழும் தடவைகள்

N = மொத்த முயல்வுகள்

குறைபாடுகள்

1. சீரான நிலைமைகளின் கீழ் பரிசோதனையானது மேற்கொள்ள முடியாவிடின் இந்த முறையைப் பயன்படுத்த முடியாது.
2. முயல்வுகளின் எண்ணிக்கை வேறுபடும் போது நிகழ்தகவு பெறுமதியானது மாறுபடலாம்.

நிகழ்தகவு தொர்பான வெளிப்படை உண்மைகள்

ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளியிலுள்ள நிகழ்ச்சி A இன் நிகழ்தகவு P(A) எனக் குறிக்கப்படும். இது பின்வரும் வெளிப்படை உண்மைகளை திருப்தி செய்கின்றது.

1. மாதிரிவெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் $P(A) \geq 0$ ஆகும்.

   இதற்கமைய நிகழ்வொன்றின் நிகழ்தகவு மறைப் பெறுமானத்தில் இருக்க முடியாது.

2. மாதிரி வெளியினடிப்படையில் நிகழ்வொன்று நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $\sum P(x) = 1$ ஆகும்.

3. இரு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்வின் போது, ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்வு மற்றைய நிகழ்ச்சியின் நிகழ்வை புறநீக்குகின்றதெனின், அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும், தம்முள் புறநீங்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும். அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் இடம் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $P(A \cap B) = 0$ ஆகும்.

4. இரு நிகழ்ச்சிகளும் தம்முள் புறநீங்கும் நிகழ்வுகள் இரண்டாக இருக்கும் போது A அல்லது B நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ஆகும்.

5. இரு நிகழ்ச்சிகளும் தம்முள் புறநீங்காத நிகழ்வுகளாக இருக்கும் போது A அல்லது B நிகழ்வதற்கான நிகழத்கவு $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ஆகும்.

உதாரணம்:

கோடாத ஒரு தாயக்கட்டையை மேலே எறியும் ஒரு பரிசோதனை மேற்கொள்ளப்படுகின்றது.

i. மேல் முகத்தில் பெறப்படும் எண் 4 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

   மாதிரிவெளி S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

n (S) = 6

4 பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{6}$

ii. மேல் முகத்தில் பெறப்படும் எண் ஓர் ஒற்றை எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

iii. மேல் முகத்தில் பெறப்படும் எண் 2 இலும் கூடிய ஓர் எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2. ஒரு பையில் ஒரே அளவிலான 07 சிவப்பு மாபிள்களும் 05 நீல மாபிள்களும் 03 மஞ்சள் மாபிள்களும் உண்டு. அமலா இவற்றிலிருந்து எழுமாறாக ஒரு மாபிளை எடுத்தாள்.

   i. கிடைக்கத்தக்க பெறுபேறுகளின் மாதிரிவெளியை எழுதுக.

   $S = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, B1, B_2, B_3, B_4, B_5, Y_1, Y_2, Y_3\}$

   ii. n(S) யாது??

   n(S) = 15

   iii. ஒரு சிவப்பு மாபிள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகளின் தொடை A ஆயின், தொடை A யை எழுதுக.

   $A = \{\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7\}$

   iv. n(A) யாது?

   n(A) = 7

   v. ஒரு சிவப்பு மாபிள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

   $$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

   $$= \frac{7}{15}$$

   vi. ஒரு சிவப்பு மாபிள் கிடைக்காதிருப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகளின் தொடை B ஆயின், தொடை B யை எழுதுக.

   $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, Y_1, Y_2, Y_3\}$

vii. n(B) யாது?

n (B) = 8

vii. ஒரு சிவப்பு மாபிள் கிடைக்காதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$= \frac{8}{15}$$

viii. ஒரு சிவப்பு மாபிள் கிடைப்பதற்கான, ஒரு சிவப்பு மாபிள் கிடைத்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

$$= \frac{7}{15} + \frac{8}{15} = 1$$

சுருக்கம்

ஒரு பரிசோதனையின் பெறுபேறினை சரியாக எதிர்வு கூற முடியாத பரிசோதனை எழுமாற்றுப் பரிசோதனை எனப்படும்.

பரிசோதனை ஒன்றின் எல்லா இயல்தகு பேறுகளையும் கொண்ட தொடை, அப்பரிசோதனையின் மாதிரிவெளி எனபப்டும் ஒரு பரிசோதனைக்குரிய மாதிரிவெளியின் தொடைப்பிரிவு நிகழ்ச்சி எனப்படும்.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் மாதிரி வெளியில் ஒவ்வொரு மூலகத்தினாலும் காட்டப்படும் நிகழ்ச்சிகள் சமநேர்தகவுடைய, சமநேர்தகவற்ற நிகழ்ச்சிகளைக் குறிப்பிடுக.

   i. சீரான கோடாத ஒரு சதுரமுகித் தாயக்கட்டையை உருட்டுதல்.

   ii. கோடாத நாணயமொன்றை மேலே எறிதல்.

   iii. ஒரு வரைதல் ஊசியை மேலே எறிதல்.

   iv. ஒரு சோடா மூடியை மேலே எறிதல்.

   v. ஒரு பந்தை மேலே எறிதல்.

vi. ஒரு பையிலுள்ள ஒரே அளவிலான 3 சிவப்பு கோலிக் குண்டுகள் 4 பச்சை கோலிக் குண்டுகளின் தொகுதியிலிருந்து ஒன்றை எழுமாறாக எடுத்தல்.

vii. ஒரு பக்கத்தில் சிறிது ஈயம் பூசப்பட்ட ஒரு நாணயத்தை மேலே எறிதல்.

viii. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து எழுமாறாக ஒரு சீட்டினை வெளியே எடுத்தல்.

a. (இங்கு 4 வகையான சீட்டுக்கள் உண்டு)

ix. 6 மூலகங்களைக் கொண்ட சீரான சதுரமுகித் தாயக்கட்டை ஒன்றின் 2 முகங்களில் சிவப்பு நிறமும் 3 முகங்களில் பச்சை நிறமும் 1 முகத்தில் நீல நிறமும் பூசப்பட்டுள்ளன. இத்தாயக்கட்டையை மேலே உருட்டும்போது சிவப்பு அல்லது பச்சை அல்லது நீல நிறத்தைப் பெறுதல்.

2. சமதகவுடைய பேறுகள் இடம்பெறும் ஒரு மாதிரிவெளி S இல் உள்ள நிகழ்ச்சி A ஆகும். $n(A) = 23, n(S) = 50$ எனின்,

i. P(A)

ii. P(A) ஐக் காண்க.

3. ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதரிவெளி S ஆனது $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ஆகும். இங்கு ஒவ்வொரு பேறும் சமதகவுள்ளதெனின், பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடை தருக.

i. A ஆனது S இல் உள்ள ஓர் எளிய நிகழ்ச்சியாகும். A எடுக்கத்தக்க எல்லா நிகழ்ச்சிகளையும் எழுதுக.

ii. அந்நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் $P(A)$ ஐக் காண்க.

iii. B ஆனது S இல் உள்ள 4 மூலகங்கள் இடம்பெறும் ஒரு கூட்டு நிகழ்ச்சியாகும். B இற்கு ஓர் உதாரணத்தை எழுதுக.

iv. $\mathrm{P(B), P(B')}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

v. X ஆனது வேறொரு மாதிரி வெளியில் $\mathrm{P(X)} = 0.5$ ஆகவுள்ள ஓர் நிகழ்ச்சியாகும். $\mathrm{P(X')}$ ஐக் காண்க.

திறவுச் சொற்கள்

எழுமாற்று மாறி, நிகழ்ச்சி, மாதிரிவெளி

உசாத்துணை நூற்கள்

Freeman, J., Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., & Shoesmith, E. (2017). *Statistics for Business and Economics*. (4th ed.). Cengage

Gupta, C.S. (2013). *Fundamentals of Statistics*. Himalaya Publishing House

McClave, B., & Sincich. (2001). *Statistics for Business and Statistics*. Prentice Hall.